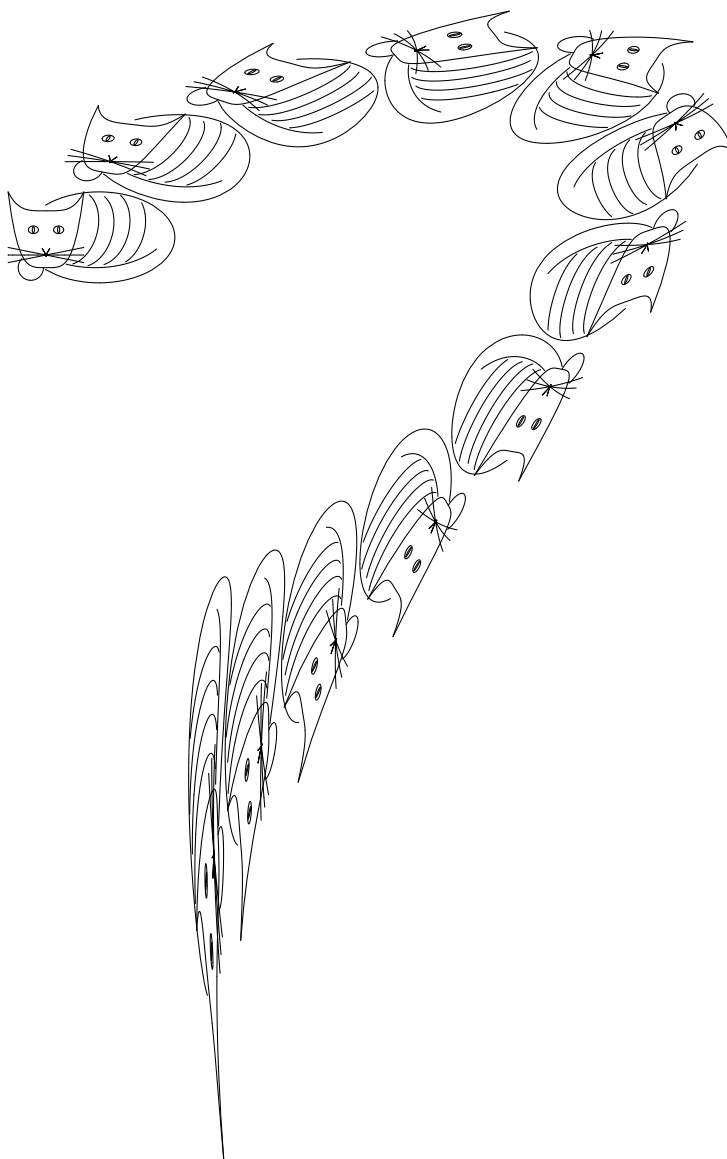


Johan Hamberg

Anders Lennartsson

# Differentialgeometrisk Integrationsalgoritmer





Johan Hamberg

Anders Lennartsson

# Differentialgeometriska Integrationsalgoritmer

Utgivare Totalförsvarets Forskningsinstitut Avdelningen för Systemteknik 172 90 STOCKHOLM	Rapportnummer, ISRN FOI-R--0154--SE	Klassificering Metodrapport
	Forskningsområde Spaning och ledning	
	Månad, år Juni 2001	Projektnummer E6004
	Verksamhetsgren Uppdragsfinansierad verksamhet	
	Delområde NBC-studier (ÖCB)	
Författare/redaktör Johan Hamberg      Anders Lennartsson	Projektledare Johan Hamberg	
	Godkänd av Arne Sundström	
	Tekniskt och/eller vetenskapligt ansvarig Martin Hagström	
Rapportens titel Differentialgeometriska Integrationsalgoritmer		
Sammanfattning (högst 200 ord)  Denna rapport beskriver nuläget för den pågående forskningen inom området differentialgeometriskt baserade numeriska metoder, vilken bedrivs inom projektet Optimering av Robotprestanda. Metoderna kommer att få en väsentlig roll för framtida styrning och simulering av robotar och robotsystem, exempelvis för skrovfasta tröghetsnavigeringssystem och vid simuleringar. Noggrann numerisk lösning av rörelseekvationerna är viktig vid simulering över långa tidsintervall eller vid komplicerade rörelser. Delar av resultaten har redan beskrivits i rapporten FOA-R--00-10627-314--SE <i>Optimering av robotprestanda: Olinjär systemteori</i> , vars kapitel 6 utgör en preliminär version av denna rapport.		
Nyckelord Differentialgeometriska integrationsalgoritmer		
Övriga bibliografiska uppgifter	Språk Svenska	
ISSN 1650-1942	Antal sidor 17	
Distribution Enligt missiv	Pris Enligt prislista Sekretess Öppen	

Issuing organization Swedish Defence Research Agency System Technology Division SE-172 90 STOCKHOLM Sweden	Report number, ISRN FOI-R--0154--SE	Report type Methodology report
	Research area code C <sup>4</sup> ISR	
	Month year June 2001	Project no. E6004
	Customers code Contracted Research	
	Sub area code NBC-studies for the Agency for Civil Emergency Planning	
Author/s (editor/s) Johan Hamberg      Anders Lennartsson	Project manager Johan Hamberg	
	Approved by Arne Sundström	
	Scientifically and technically responsible Martin Hagström	
Report title Differential Geometrical Integration Algorithms		
Abstract (not more than 200 words) <p>This report describes the present status of the ongoing research in the field of differential geometric numerical methods done within the project Optimization of Missile Performance. These methods will play an essential role in future guidance and simulation of missiles and missile systems, e.g. for strapdown navigation systems. Accurate numerical solution of the equations of motion is important for complicated motions or long simulation times. Most of the contents of the present report has already been described in the report FOA-R--00-10627-314--SE <i>Optimization of missile performance: nonlinear system theory</i>, chapter 6 of which constitutes a preliminary version of the present report.</p>		
Keywords Differential geometrical integral algorithms		
Further bibliographic information	Language Swedish	
ISSN 1650-1942	Pages 17	
Distribution Enligt missiv	Price acc. to pricelist Security classification Unclassified	



# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Differentialgeometri och Numerisk Analys</b>	<b>3</b>
2.1	Differentialgeometri . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Variationsintegratorer</b>	<b>5</b>
3.1	Diskretisering av variationsproblem . . . . .	5
3.2	Hamiltonska system . . . . .	6
3.3	Besläktade problemställningar . . . . .	6
3.3.1	Fältproblem . . . . .	6
3.3.2	Dissipativa system . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Vänsterinvarianta Dynamiska System</b>	<b>7</b>
4.1	Linjära Liegrupper . . . . .	7
4.2	Vänsterinvarianta dynamiska system . . . . .	7
4.3	Produktintegration . . . . .	7
4.4	Vänsterinvarianta lösningsalgoritmer . . . . .	8
4.5	Användning av Baker-Campbell-Hausdorffs formel . . . . .	9
4.5.1	Algoritmer för steg B . . . . .	10
4.5.2	Algoritmer för steg A . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Rotationsgruppen</b>	<b>11</b>
5.1	Integrationsproblemet . . . . .	11
5.2	Allmänna integrationsmetoder . . . . .	12
5.3	Användning av Cayleytransformationen . . . . .	13
5.4	Stokastisk motsvarighet . . . . .	13
5.5	Feluppskattningar . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Algoritmer och numeriska resultat</b>	<b>15</b>





# Kapitel 1

## Inledning

Denna rapport beskriver nuläget för den pågående forskningen inom området differentialgeometriskt baserade numeriska metoder, vilken bedrivs inom projektet Optimering av Robotprestanda. Metoderna kommer att få en väsentlig roll för framtida styrning och simulering av robotar och robotsystem. Exempelvis har bestämning av orientering utifrån vinkelhastigheter stor betydelse både vid simuleringar och för skrovfasta tröghetsnavigeringssystem. Noggrann numerisk lösning av rörelseekvationerna är viktig vid simulering över långa tidsintervall eller vid komplicerade rörelser.

Inom projektet har metoder utvecklats för

- integration på rotationsgruppen  $SO(3)$ , med omedelbara tillämpningar på robotsimulering och för signalbehandling av robotens tröghetsnavigeringssystem,
- integration på allmänna Liegrupper, syftande till tillämpningar på robotar och undervattensfarkoster (gruppen är då den Euklidiska gruppen  $SE(3)$  av kombinerade rotationer och translationer) samt på vissa svängningsproblem inom området parametrisk resonans (gruppen är då den symplektiska gruppen  $Sp(2n)$ ),
- lösning av Poincaré-Eulers ekvationer på (tangentknippet till) Liegrupper, även här med speciellt  $SO(3)$  och  $SE(3)$  i åtanke,
- beräkning av holonomiintegraler i principalfiberknippen, vilket populärt uttryckt är matematiken bakom det fenomen som tillåter en katt att "vända sig i fallet". Detta har potentiella militära tillämpningar inom satellit- och AUV-teknik.

Delar av resultaten har redan beskrivits i rapporten Hamberg (2000), vars kapitel 6 utgör en preliminär version av denna rapport. Det har också framkommit att likartad verksamhet finns vid andra institut, framförallt vid universiteten i Bergen, Trondheim och Cambridge, se Iserles et al. (2000), Munthe-Kaas (1999), Moan (1998).



## Kapitel 2

# Differentialgeometri och Numerisk Analys

### 2.1 Differentialgeometri

Differentialgeometri kan betraktas som koordinatfri differential- och integralkalkyl. Den klassiska differentialgeometrin behandlade lokala geometriska egenskaper hos kurvor och ytor i det åskådliga Euklidiska rummet och kan anses ha inletts omkring 200 f. Kr. av Arkimedes bestämning av sfärens area och volym med en tidig integralkalkyl (exhaustionsmetoden). Gauss teori för konforma avbildningar (1822) och allmänna undersökningar av krökta ytor (1827) samt Frenets formler (1800-talets mitt) för krökta rymdkurvor är andra tidiga bidrag. Riemann abstraherade begreppet till allmänna rum ("mångfalder") av godtycklig dimension. Vid sekelskiftet 1900 hade begrepp från geometri, analys och algebra smälts samman till en differentialgeometrisk transformationsteori (Bäcklund, Klein, Lie, Killing, Darboux, E. Cartan m.fl.) med tillämpningar på differentialekvationer. Samtidigt uppstod den klassiska tensorsorkalkylen (Christoffel, Bianchi, Ricci, Schouten, Levi-Civita). Fram till 1940-talets mitt var nästan alla undersökningar lokala och genomfördes med "allmänna" lokala koordinatsystem. Under efterkrigstiden infördes globala metoder och koordinatfri formalism (Weyl, deRham, Chevalley, Dieudonné, Chern, Ehresmann, Whitney, Lichnerowicz m.fl.) och, efter hand, en starkare koppling till modern analys (Eells, Atiyah, Singer, Duistermaat, Guillemin, Weinstein, Gromov m.fl.).

Differentialgeometrin har utvecklats i symbios med sina många tillämpningar. Tidiga tillämpningar var Eulers undersökningar av krökta balkar, Gauss tillämpningar av teorin för krökta ytor på kapillaritet och Christoffels användning av krökningsbegreppet för studium av värmeledning i anisotropa och inhomogena medier. Paradexemplen från den teoretiska fysiken är naturligtvis Einsteins allmänna relativitetsteori, elektrodynamiken, kontinuumsmekniken, gaugefält- och strängteorier. För denna rapport mer centrala tillämpningar är den *analytiska mekaniken* och den *olinjära reglerteorin*.

Genomgående för tillämpningarna är att man fäster stor avseende vid *objektivitet*, d.v.s. koordinat- och parametriseringoberoende.

Differentialgeometriska metoder har sedan mitten av 1980-talet kommit att spela en allt mer betydelsefull roll inom *numerisk analys*, *statistikteori*, *signalbehandling* och besläktade discipliner. Inom statistikteori har differentialgeometriska metoder kommit till användning för parameterfri beskrivning av familjer (mångfalder) av fördelningsfunktioner (Amari, Barndorff-Nielsen m.fl) och inom signalbehandling har ändligdimensionella optimala filter för olinjära system studerats med Liealgebraiska metoder (Beneš, Brockett, Yau, Wong m.fl.).

Inom numeriken har intresset varit stort för strukturbevarande algoritmer, särskilt s.k. *mekaniska integratorer* för Hamiltons ekvationer. Bland sådana märks

- Symplektiska integratorer, vilka bevarar den symplektiska strukturen exakt. Varje tidssteg sker således med en kanonisk transformation.
- Energiintegratorer, vilka bevarar energin exakt.
- Momentumintegratorer, vilka exakt bevarar Noetherska rörelsekonstanter.

Erfarenhet visar att dylika integratorer ger extremt god noggrannhet för långa integrationstider. De har framgångsrikt använts inom celest mekanik, bl.a. för beräkning av rörelsen hos Jupiters månar. Enligt uppgift ger dessa algoritmer också mycket god noggrannhet även för approximativt hamiltonska system. Det finns integrationsalgoritmer som förenar två av de ovannämnda egenskaperna och en sats som (i det allmänna fallet) utesluter möjligheten att uppfylla alla tre egenskaperna samtidigt. Det är dock möjligt att åstadkomma samtidigt bevarande av alla tre egenskaperna om tidssteget anpassas för ändamålet. Detta kan emellertid komma i konflikt med andra krav på noggrannhet.

Under de senaste åren har intresset fokuserats på s.k. variationsintegratorer, vilka ger den exakta lösningen på ett diskretiserat variationsproblem. Teorin för variationsintegratorer sammanfattar, systematiserar och förenklar (delar av) teorierna för mekaniska integratorer.

En annan relevant utvecklingslinje har kunnat skönjas de senaste åren, från andra halvan av 1990-talet, nämligen Lieteoretiska integrationsalgoritmer. Många problem har sin naturligaste formulering som dynamiska system på en Liegrupp, eller allmänare på en mångfald med Liegruppsverkan. Numerisk implementation sker i allmänhet med hjälp av en matrisrepresentation av Liegruppen. Genom att formulera integrationsalgoritmer i Lieteoretiska termer vinner man många fördelar, t.ex. bättre noggrannhet, enklare feluppskattningsformler samt en enkel metod att översätta algoritmer mellan olika representationer.

Inom projektet har sådana metoder för integration på rotationsgruppen  $SO(3)$  utvecklats, vilket har omedelbara tillämpningar på robotsimulering och för signalbehandling av robotens tröghetsnavigeringssystem. Metoderna kan också direkt tillämpas på andra Liegrupper, såsom  $SE(3)$  och  $Sp(2n)$ .

## Kapitel 3

### Variationsintegratorer

#### 3.1 Diskretisering av variationsproblem

Betrakta ett dynamiskt system beskrivet av Lagrange's ekvationer för variablerna  $q^i$ , ( $i = 1, \dots, n$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \equiv L''_{\dot{q}^i \dot{q}^j} \dot{q}^j + L''_{\dot{q}^i q^j} \dot{q}^j + L''_{\dot{q}^i t} - L'_{q^i} = 0 \quad (3.1)$$

med den givna Lagrangefunktionen  $L(q, \dot{q}, t)$ . Från elementär variationskalkyl är känt ("Hamiltons princip") att detta villkor på trajektorian  $\chi : t \mapsto q^i(t)$  innebär att verkansintegralen

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.2)$$

är stationär för  $\chi$ .

Ett systematiskt sätt att konstruera numeriska integrationsalgoritmer är att diskretisera variationsproblemet snarare än differentialekvationen. Låt därför  $\bar{L}(q_A, q_{A+1}, t_A, t_{A+1})$  vara en godtycklig numerisk approximation av min( $J$ ) under bivillkoren att  $t_0 = t_A$ ,  $t_1 = t_{A+1}$ ,  $q_A = q(t_A)$  och  $q_{A+1} = q(t_{A+1})$ .

- *Exempel.* Approximationen  $\bar{L}$  kan vara av mycket enkelt slag, t.ex. verkansintegralen beräknad för linjen  $q^i(t) = q_A^i + \left( \frac{t-t_A}{t_{A+1}-t_A} \right) (q_{A+1}^i - q_A^i)$ . Denna föreskrift är emellertid beroende av valet av koordinatsystem och kommer att ge olika stora fel för olika val av koordinatsystem. Studium av speciella strukturer hos ett visst problem (t.ex. symmetri) kan användas för att välja en lämplig approximation  $\bar{L}$ .

En approximation av hela verkansintegralen ges då av summan

$$\bar{J} = \sum_{A=0}^{N-1} \bar{L}(q_A, q_{A+1}, t_A, t_{A+1}) \quad (3.3)$$

En numerisk metod för att successivt bestämma punkterna  $q_A$ , ( $A = 1, \dots, N$ ) ges då genom lösning av systemet

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial q_A} = 0 \quad (3.4)$$

Den Lagrangeska energin bevaras exakt om diskretiseringstidpunkterna  $t_A$ , ( $A = 1, \dots, N$ ) uppfyller

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t_A} = 0 \quad (3.5)$$

### 3.2 Hamiltonska system

Hamiltons ekvationer för variablerna  $q^i, p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned} \quad (3.6)$$

med den givna Hamiltonfunktionen  $H(q, p, t)$  hänger också samman med ett variationsproblem ("den kanoniska variationsprincipen"). Trajektorierna utgör stationära punkter till funktionalen

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} p\dot{q} - H(q, p, t) dt \quad (3.7)$$

Ovanstående allmänna diskretiseringsresonemang kan direkt tillämpas, varvid den uppkomna numeriska algoritmen automatiskt bevarar den symplektiska strukturen  $dq^i \wedge dp_i$ . Om  $H$  inte beror explicit av  $t$  och diskretiseringspunkterna väljs så att de satisfierar (3.5), blir därvid  $H(q_A, p_A)$  konstant för den extremala trajektorian. Om den diskretiserade Lagrangefunktionen

$$\bar{L}(q_A, q_{A+1}, p_A, p_{A+1}, t_A, t_{A+1}) \quad (3.8)$$

är invariant under en symmetrigrupp, bevaras också diskreta motsvarigheter till de Noetherska rörelsekonstanterna.

Allt detta kan lätt verifieras med differentialkalkyl; exempelvis blir uppdateringsalgoritmen tydligt symplektisk eftersom (3.4) uttrycker att (3.8) är en genererande funktion till transformationen  $(q_A, p_A) \mapsto (q_{A+1}, p_{A+1})$ .

### 3.3 Besläktade problemställningar

**3.3.1 Fältproblem** Partiella differentialekvationer som kan skrivas som variationsproblem kan lösas numeriskt med likartade metoder. Variationsprincipen diskretiseras. Detta ger stor flexibilitet i valet av diskretisering av rumtiden. En s.k. multisymplektisk struktur bevaras därvid exakt. Som i fallet med endimensionella variationsintegratorer blir felet avhängigt kvaliteten hos den approximativa verkan  $\bar{L}$ . Varken för fältproblem eller endimensionella problem finns någon egentlig teori för hur denna bäst skall väljas eller för feluppskattningar. Exempel har emellertid visat synnerligen goda prestanda även hos multisymplektiska integratorer.

**3.3.2 Dissipativa system** Lagranges och Hamiltons ekvationer beskriver bl.a. ideala mekaniska system utan dissipation. För dissipativa system kan metoderna modifieras, vilket enligt uppgift skall ha gett goda resultat i några fall. Även här saknas idag en systematisk teori.

## Kapitel 4

### Vänsterinvarianta Dynamiska System

#### 4.1 Linjära Liegrupper

Merparten av innehållet i denna rapport gäller generellt för Liegrupper. Av huvudsakligen beteckningsmässiga skäl inskränker vi diskussionen till *linjära Liegrupper*. Vi ger här en separat definition av linjära Liegrupper, och kan på det sättet kringgå den tämligen omfattande formelapparaten som krävs för "abstrakta" Liegrupper.

- *Definition.* En (reell) *linjär Liegrupp* är en undergrupp  $\mathcal{G}$  till den allmänna linjära gruppen  $GL(N)$  av icke-singulära (reella)  $N \times N$ -matriser, sådan att  $\mathcal{G}$  är en sluten delmängd av  $GL(N) \subseteq \mathbb{R}^{N \times N}$ .

Speciellt innehåller  $\mathcal{G}$  enhetsmatrisen  $I$ . Man kan visa att  $\mathcal{G}$  utgör en inbäddad undermångfald i  $GL(N) \subseteq \mathbb{R}^{N \times N}$ . Dess tangentplan i  $I$  är ett linjärt underrum  $\mathfrak{g}$  till  $\mathfrak{gl}(N) = \mathbb{R}^{N \times N}$ . Det linjära rummet  $\mathfrak{g}$  är slutet under kommutator: om  $a, b \in \mathfrak{g}$  så är  $[a, b] \equiv ab - ba \in \mathfrak{g}$ . Matrisexponetiering avbildar  $\mathfrak{g}$  på  $\mathcal{G}$  och det finns omgivningar  $0 \in U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$  och  $I \in U_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}$  sådana att  $\exp|_{U_{\mathfrak{g}}} : U_{\mathfrak{g}} \rightarrow U_{\mathcal{G}}$  är en diffeomorfism.

#### 4.2 Vänsterinvarianta dynamiska system

De differentialekvationer vi intresserar oss för har följande form

$$\dot{Q}(t) = Q(t) \Omega(t) \quad (4.1)$$

där  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  och  $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Ekvationen (4.1) har en speciell egenskap. Den utgör ett *vänsterinvariant, icke-autonomt dynamiskt system* på  $\mathcal{G}$ . Det betyder att om  $Q_0(t)$  är en lösning och  $R \in \mathcal{G}$ , så är  $RQ_0(t)$  också en lösning. I själva verket kan varje lösning skrivas som  $RQ_0(t)$  för ett unikt  $R \in \mathcal{G}$ . Ekvationen är m.a.o. invariant vid multiplikation från vänster med (konstanta) element ur gruppen.

#### 4.3 Produktintegration

Betrakta problemet är att numeriskt lösa differentialekvationen

$$\dot{Q}(t) = Q(t) \Omega(t) \quad (4.2)$$

$$Q(0) = I \quad (4.3)$$

för den sökta funktionen  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$  där  $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$  är en given funktion.

Lösningen till differentialekvationen kan skrivas som en *produktintegral*

$$Q(t) = \prod_0^t e^{\Omega(\tau)d\tau} \quad (4.4)$$

Produktintegralen är gränsvärdet, när  $N \rightarrow \infty$ , av ändliga produkter av typen

$$e^{\Omega(\tau_0)\Delta\tau} e^{\Omega(\tau_1)\Delta\tau} \dots e^{\Omega(\tau_{N-1})\Delta\tau} \quad (4.5)$$

där  $\Delta\tau = \frac{t}{N}$  och  $i < \frac{\tau_i}{\Delta\tau} < i + 1$ . Observera att faktorernas ordning är väsentlig.

Om  $\Omega(\tau_1)$  och  $\Omega(\tau_2)$  kommuterar för alla  $\tau_1$  och  $\tau_2$  i intervallet  $[0, t]$ , är faktorernas ordning irrelevant, och produktintegralen kan beräknas som

$$\prod_0^t e^{\Omega(\tau)d\tau} = e^{\int_0^t \Omega(\tau)d\tau} \quad (4.6)$$

I det allmänna fallet gäller i stället att

$$\prod_0^t e^{\Omega(\tau)d\tau} = e^{W(t)} \quad (4.7)$$

där

$$W(t) = \int_0^t \Omega(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\tau [\Omega(\tau_1), \Omega(\tau)] d\tau_1 d\tau + \dots \quad (4.8)$$

Produktintegraler har flera egenskaper gemensamma med vanliga summaintegraler. Exempelvis uppfyller de varianter av Cauchys integralsats och residykalkyl samt ett slags motsvarighet till Stokes' sats. Man kan förvänta sig att dessa egenskaper kommer få flera tillämpningar i framtiden. I denna rapport koncentrerar vi oss mest på dess numeriska implementation.

#### 4.4 Vänsterinvarianta lösningsalgoritmer

Vänsterinvariansen är den fundamentala symmetriegenskapen hos ekvationen, och det är som nämnts naturligt att intressera sig för numeriska algoritmer som också har denna egenskap.

Låt exempelvis  $K : \mathcal{G} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$  vara en numerisk ettstegsmetod som för varje  $Q(t)$  och  $\Omega(t)$  beräknar en uppdatering  $Q(t + \Delta t) = K(Q(t), \Omega(t))$ . Att metoden är vänsterinvariant betyder att  $K(RQ, \Omega) = RK(Q, \Omega)$  identiskt i  $R, Q \in \mathcal{G}$  och  $\Omega \in \mathfrak{g}$ . Speciellt kan vi för fixt  $t$  välja  $R = Q(t)^{-1}$ , vilket ger  $Q(t + \Delta t) = Q(t) K(I, \Omega(t)) = Q(t) k(\Omega(t))$ . Samma resonemang och resultat gäller generellt även för högre ordningars metoder. En vänsterinvariant numerisk metod är alltså med nödvändighet *multiplikativ*.

Den exakta lösningen till differentialekvationen svarar mot  $k = \prod_t^{t+\Delta t} e^{\Omega(\tau)d\tau}$ .

En användbar numerisk metod levererar en faktor  $k \in \mathcal{G}$  i en liten omgivning  $U_{\mathcal{G}}$  av enhetselementet  $I$ , sådan att restriktionen av exponentialavbildningen till  $U_{\mathfrak{g}} = \exp^{-1}(U)$  är bijektiv. Det finns alltså ett entydigt bestämt  $W \in U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$  sådant att  $k = e^W$ .

En allmän vänsterinvariant numerisk metod kan således anses bestå av följande delar:

A) en (flerstegs-)metod för att konstruera en interpolerande funktion  $\Omega_{int}(\tau)$ ,  $\tau \in [t, t + \Delta t]$  från ändligt många data om  $\Omega$ .

B) en approximativ beräkning av  $\prod_t^{t+\Delta t} e^{\Omega_{int}(\tau)d\tau}$  sådan att den ges av  $e^W$  för något  $W \in \mathfrak{g}$ .

*Exempel:* Betrakta som ett enkelt exempel en ettstegsmetod med  $\Omega_{int}(\tau) \equiv \Omega(t + \frac{1}{2}\Delta t)$ .

Då kan  $\prod_t^{t+\Delta t} e^{\Omega_{int}(\tau)d\tau}$  beräknas exakt, och blir  $e^{\Omega(t + \frac{1}{2}\Delta t)\Delta t}$ .



Högre ordningars metoder svarar mot högre ordningars polynomiella interpolationsformler  $\Omega_{int}$ . Beräkningen av  $\prod_t^{t+\Delta t} e^{\Omega_{int}(\tau)d\tau}$  som  $e^W$  för något  $W$  måste då i allmänhet bli approximativ och kommer att inbegripa kommutatorer mellan polynomkoefficienterna.

De vänsterinvarianta ekvationer vi studerat ovan är specialfall av s.k. *ekvationer av Liety*. Låt  $\beta : M \times \mathcal{G} \rightarrow M$  vara en högerverkan av Liegruppen  $\mathcal{G}$  på mångfalden  $M$ , och beteckna  $\beta(x, a)$  med  $xa$ . Att  $\beta$  är en högerverkan betyder att  $(xa)b = x(ab)$  identiskt. Ett dynamiskt system på  $M$  sägs vara en differentialekvation av Liety om dess trajektorier parametriseras av  $xa(t)$ , där  $x \in M$  och  $a(t)$  är lösningar till en vänsterinvariant differentialekvation på  $\mathcal{G}$ . De metoder vi här diskuterar kan direkt användas för allmänna ekvationer av Liety. För ekvationer av Liety kan användas Lies reduktionsmetod: om man känner en partikulärlösning till en ekvation av Liety, så kan den allmänna lösningen erhållas via lösandet av en annan ekvation av Liety av lägre ordning. Ett exempel härpå ges av den skalära Riccatiekvationen.

#### 4.5 Användning av Baker-Campbell-Hausdorffs formel

Baker-Campbell-Hausdorffs formel är ett uttryck för  $e^A e^B$  som  $e^{c(A,B)}$ , där  $c(A, B) = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots$ . Nedanstående resultat kan ses som ett slags linearisering av Baker-Campbell-Hausdorffs formel m.a.p. variabeln  $B$ . Den fullständiga Baker-Campbell-Hausdorffs formel kan erhållas ur denna linearisering genom ett slags integrationsförfarande. Vi behöver här bara den lineariserade varianten, men man kan förutspå att den fullständiga Baker-Campbell-Hausdorffs formel i framtiden kommer att ha betydelse för numeriska metoder.

Vi skall alltså betrakta problemet att uttrycka  $\prod_0^t e^{\Omega(\tau)d\tau}$  som  $e^{W(t)}$  för något  $W \in \mathfrak{g}$  för små  $t$ .

**Sats.** Med beteckningen  $ad_A B = [A, B]$  gäller att

$$\frac{d}{dt} e^{W(t)} = e^{W(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad_{W(t)})^k \dot{W}(t)}{(k+1)!} \quad (4.9)$$

**Bevis:**

$$\begin{aligned} \frac{e^{W(t+\delta)} - e^{W(t)}}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \left[ -e^{(1-s)W(t+\delta)} e^{sW(t)} \right]_0^1 = \frac{1}{\delta} \int_0^1 \frac{d}{ds} \left( -e^{(1-s)W(t+\delta)} e^{sW(t)} \right) ds = \\ &= \int_0^1 e^{(1-s)W(t+\delta)} \left( \frac{W(t+\delta) - W(t)}{\delta} \right) e^{sW(t)} ds \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} e^{W(t)} \int_0^1 e^{-sW(t)} \dot{W}(t) e^{sW(t)} ds. \end{aligned}$$

Men  $e^{-sA} B e^{sA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s ad_A)^k B}{k!}$ , ty båda led satisfierar ekvationen  $\dot{F} = -ad_A F$  med begynnelsevärdet  $F(0) = B$ . Detta tillämpas på integranden i det sista ledet. Integralen kan nu beräknas och påståendet följer.

Sambandet mellan  $\Omega$  och  $\dot{W}$  kan således skrivas  $\Omega = H(ad_W) \dot{W}$ , där  $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(k+1)!} = \frac{1-e^{-x}}{x}$ , alternativt

$$\dot{W} = h(ad_W) \Omega \quad (4.10)$$

$$h(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} \quad (4.11)$$

Detta ger oss en metod att beräkna  $W(t)$  utifrån  $\Omega(t)$ . Ekvationen för  $\dot{W}$ ,

$$\dot{W} = \Omega + \frac{1}{2} [W, \Omega] + \frac{1}{12} [W, [W, \Omega]] - \frac{1}{720} [W, [W, [W, [W, \Omega]]]] + \dots \quad (4.12)$$

gäller för varje Liegrupp/Liealgebra.

För speciella Liegrupper och speciella representationer av dess kan slutna uttryck tecknas. Speciellt har vi för den definierande representationen av rotationsgruppen  $SO(3)$  att

$$\dot{W} = \Omega + \frac{1}{2} [W, \Omega] + \frac{1}{w^2} \left( 1 - \frac{w \sin w}{2 - 2 \cos w} \right) [W, [W, \Omega]] \quad (4.13)$$

$$\text{där } w = \sqrt{\text{tr} \left( \frac{1}{2} W^T W \right)} \quad (4.14)$$

Denna formel kallas i navigeringskretsar för Bortz' formel.

**4.5.1 Algoritmer för steg B** För att beräkna ett inkrementellt steg behövs inte den exakta formen av Baker-Campbell-Hausdorffs (eller Bortz') formel. Exempelvis kan man om  $\Omega_{int}$  är ett polynom i  $t$  av graden  $p$ , ansätta en approximativ lösning  $W$  som ett polynom i  $h = \Delta t$  av graden  $p + 1$ . Koefficienterna kan bestämmas rekursivt genom upprepad substitution i (4.12).

Om exempelvis

$$\Omega_{int}(t + \tau) = \mathbb{A} + \mathbb{B}\tau + \mathbb{C}\tau^2 + \mathbb{D}\tau^3 \quad (4.15)$$

så är

$$W = h\mathbb{A} + \frac{h^2}{2}\mathbb{B} + \frac{h^3}{12}(4\mathbb{C} + [\mathbb{A}, \mathbb{B}]) + \frac{h^4}{12}(\mathbb{D} + [\mathbb{A}, \mathbb{C}]) \quad (4.16)$$

**4.5.2 Algoritmer för steg A** Valet av interpolationsformel för  $\Omega_{int}(t + \tau)$  bör göras med hänsyn tagen till felmodell m.m. Som ett exempel på interpolationsformel för  $\Omega_{int}(t + \tau)$ ,  $\tau \in [0, h]$ , baserad på avlästa  $\Omega$ -värden vid tidpunkterna  $t - 2h, t - h, t, t + h$  kan anges  $\mathbb{A} + \mathbb{B}\tau + \mathbb{C}\tau^2 + \mathbb{D}\tau^3$ , där

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \Omega(t) \\ \mathbb{B} &= \frac{\Omega(t - 2h) - 6\Omega(t - h) + 3\Omega(t) + 2\Omega(t + h)}{6h} \\ \mathbb{C} &= \frac{\Omega(t - h) - 2\Omega(t) + \Omega(t + h)}{2h^2} \\ \mathbb{D} &= \frac{-\Omega(t - 2h) + 3\Omega(t - h) - 3\Omega(t) + \Omega(t + h)}{6h^3} \end{aligned}$$

## Kapitel 5

### Rotationsgruppen

Bestämning av orientering utifrån vinkelhastigheter har stor betydelse i robotsammanhang, både vid simuleringar och för skrofvasta tröghetsnavigeringssystem. Matematiskt kan problemet betraktas som studiet av icke-autonoma, vänsterinvarianta dynamiska system på en Liegrupp, rotationsgruppen  $SO(3)$ .

Flera olika framställningar av rotationsgruppen kan användas vid analys och numerisk implementation:

- Eulervinklar,
- vridningsmatriser,
- kvaternioner (med varianterna Eulerparametrar och spinorer),
- vridningsvektorer,
- Cayleyparametrar
- m.fl.

alla med sina fördelar och nackdelar. För varje framställning kan man sedan använda standardintegrationsrutiner, t.ex. Runge-Kutta-metoden. Detta är det traditionella sättet att lösa differentialekvationerna.

Inom projektet har nyare - delvis helt nya - metoder, som utnyttjar problemets speciella struktur (vänsterinvarians) utarbetats. Metoderna bygger på s.k. produktintegration och Baker-Campbell-Hausdorffs formel. Härvid minskar feltillväxten påtagligt, och algoritmerna har även många matematiskt aptitliga egenskaper. Metoderna är användbara också för andra Liegrupper.

#### 5.1 Integrationsproblemet

Låt matrisen  $\Omega(t)$  representera en kropps vinkelhastighet, uttryckt i en medföljande HON-bas,  $\mathbf{E}(t) = (\mathbf{e}_1(t) \ \mathbf{e}_2(t) \ \mathbf{e}_3(t))$ , t.ex. de vinkelhastighetssignaler som kan uppmätas med ett skrofvast idealt gyro, och låt  $Q(t)$  vara vridningsmatrisen från  $\mathbf{E}(0)$  till  $\mathbf{E}(t)$

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(0) Q(t) \quad (5.1)$$

Det gäller därvid att  $\dot{Q}(t) = Q(t) \Omega(t)$ .

Beteckna med  $SO(3) = \{Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}; Q^T Q = I, \det Q = 1\}$  Liegruppen av ortonormerade  $3 \times 3$ -matriser med determinanten lika med ett. Dess Liealgebra  $so(3) = \{\Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}; \Omega^T + \Omega = 0\}$  utgörs av skevsymmetriska  $3 \times 3$ -matriser.

Vi inför beteckningarna

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

varvid  $E = (E_1, E_2, E_3)$  är en bas i  $so(3)$ .

Problemet är att numeriskt lösa differentialekvationen

$$\dot{Q}(t) = Q(t)\Omega(t) \quad (5.2)$$

$$Q(0) = I \quad (5.3)$$

för den sökta funktionen  $Q : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  där  $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow so(3)$  är en given funktion. Detta täcks alltså av teorin i föregående kapitel

## 5.2 Allmänna integrationsmetoder

På  $SO(3)$  kan införas lokala koordinatsystem på flera olika sätt. Populära är t.ex. *Eulervinklar*,  $(\phi, \theta, \psi)$ , definierade enligt

$$Q = e^{\psi E_3} e^{\theta E_1} e^{\phi E_3} \quad (5.4)$$

och varianter därav, exempelvis  $Q = e^{\phi_1 E_1} e^{\phi_2 E_2} e^{\phi_3 E_3}$ .

Beteckna en godtycklig uppsättning koordinater med  $(x, y, z)$ . Sådana lokala koordinatsystem har av nödvändighet alltid singulariteter. Differentialekvationen (5.2) kan därvid skrivas som ett system

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y, z, t) \\ \dot{y} = Y(x, y, z, t) \\ \dot{z} = Z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (5.5)$$

där funktionerna  $(X, Y, Z)$  beror (linjärt) på funktionen  $\Omega$ . Ekvationssystemet kan lösas numeriskt med generella standardintegrationsalgoritmer, såsom Eulers stegmetod eller Runge-Kuttas metod. Ett sådant förfarande har ett flertal svagheter som sammanhänger med varandra:

- En generell metod tar ingen hänsyn till problemets speciella struktur
- Metoden bryter samman vid koordinatsystemets singulariteter och numeriska problem tillstöter redan i närheten av dessa.
- Numeriska felfortplantningsformler blir komplicerade och beroende av koordinatpunkten  $(x, y, z)$ .
- Variationsekvationer (variationer/fel i  $\Omega$ ) blir komplicerade och beroende av koordinatpunkten  $(x, y, z)$ .

Som en första åtgärd för att råda bot på dessa svårigheter kan man tillgripa en *redundant parametrisering*, t.ex. kvaternioner. Detta har länge varit populärt i robotsammanhang. Rotationsmatrisen  $e^{\vartheta(n_1 E_1 + n_2 E_2 + n_3 E_3)}$ , där  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , identifieras med *två* kvaternionrepresentanter,  $\pm \mathbf{q}$ , där

$$\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 = \cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}n_1 \sin \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{j}n_2 \sin \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{k}n_3 \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (5.6)$$

Därvid gäller att  $|\mathbf{q}|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ . I denna framställning kan  $SO(3)$  identifieras med enhetssfären  $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ , modulo tecken.

Som i (5.5) kan dynamiken framställas som ett system av differentialekvationer, den här gången på  $\mathbb{R}^4$ . Standardalgoritmerna tillämpade på detta system av ordinära differentialekvationer lider fortfarande av spår av de tidigare svårigheterna, som här rör från att de inte tar hänsyn till den speciella strukturen hos problemet. Exempelvis kan lösningen driva iväg från enhetssfären och numeriska problem som sammanhänger med detta avhjälpas inte helt genom att t.ex. efter hand projicera lösningen på sfären eller genom att stabilisera sfären med en pålagd radiell dynamik.

Med vänsterinvarianta integrationsalgoritmer försvinner dessa svårigheter.

### 5.3 Användning av Cayleytransformationen

Som alternativ till att framställa det multiplikativa inkrementet  $k$  som  $e^W$ , kan man för vissa matrisgrupper skriva  $k = \frac{I+\tilde{W}}{I-\tilde{W}} = (I - \tilde{W})^{-1} (I + \tilde{W}) = (I + \tilde{W}) (I - \tilde{W})^{-1}$ , med  $\tilde{W} \in so(3)$ , s.k. Cayleytransformation. Detta är möjligt för  $SO(n)$ ,  $Sp(2n)$ ,  $SE(n)$ ,  $U(n)$  m.fl. Liegrupper, dock ej för t.ex.  $SL(3)$ . Cayleytransformen kan användas för sådana linjära Liegrupper  $\subseteq GL(N)$  som definieras av att de lämnar invariant en (eller flera) 2-tensorer på  $\mathbb{R}^N$  (t.ex. en bilinjär form eller en linjär avbildning). För en sådan Cayleyparametrisering gäller följande motsvarighet till Bortz' formel

$$\frac{d}{dt}\tilde{W} = \frac{1}{2}\Omega + \frac{1}{2}[\tilde{W}, \Omega] - \frac{1}{2}\tilde{W}\Omega\tilde{W} \quad (5.7)$$

d.v.s. ett slags Riccatiekvation.

### 5.4 Stokastisk motsvarighet

Ovanstående formulering och analys har relevans även om vinkelhastigheterna är behäftade med "normalfördelat isotropt vitt brus", d.v.s. om dynamiken ersätts med följande stokastiska differentialekvation

$$dQ(t) = Q(t)(\Omega(t)dt + \sigma EdB)$$

Här är som tidigare  $E = (E_1, E_2, E_3)$  och  $B = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))^T$  en tredimensionell Wienerprocess med diffusionskonstanten  $\sigma^2$ .

Genom diskretisering erhålles följande approximativa stokastiska produktintegral:

$$Q = e^{W_1 + \sigma N_1} e^{W_2 + \sigma N_2} \dots e^{W_N + \sigma N_N}$$

Här är  $N_1, N_2, \dots, N_N$  oberoende standardiserade normalfördelade stokastiska vektorvariabler. Man kan också framställa den approximativa lösningen på följande sätt

$$Q = e^{W_1} e^{\sigma \hat{N}_1} e^{W_2} e^{\sigma \hat{N}_2} \dots e^{W_N} e^{\sigma \hat{N}_N}$$

även här är  $\hat{N}_1, \hat{N}_2, \dots, \hat{N}_N$  oberoende standardiserade normalfördelade stokastiska vektorvariabler.

Härvid gäller att

$$\begin{aligned} e^{W_1} e^{\sigma \hat{N}_1} e^{W_2} e^{\sigma \hat{N}_2} \dots e^{W_N} e^{\sigma \hat{N}_N} &= \\ e^{W_1} e^{\sigma \hat{N}_1} e^{-W_1} e^{W_1} e^{W_2} e^{\sigma \hat{N}_2} \dots e^{W_N} e^{\sigma \hat{N}_N} &= \\ e^{e^{W_1} \sigma \hat{N}_1} e^{-W_1} e^{W_1} e^{W_2} e^{\sigma \hat{N}_2} \dots e^{W_N} e^{\sigma \hat{N}_N} &= \\ e^{\sigma \hat{N}_1} e^{W_1} e^{W_2} e^{\sigma \hat{N}_2} \dots e^{W_N} e^{\sigma \hat{N}_N} &= \end{aligned}$$

där vi använt  $e^A e^B e^{-A} = e^{e^A B e^{-A}}$ . Upprepas argumentet rekursivt erhålles till slut

$$Q = e^{\sigma \tilde{N}_1} e^{\sigma \tilde{N}_2} \dots e^{\sigma \tilde{N}_N} e^{W_1} e^{W_2} \dots e^{W_N}$$

där  $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \dots, \tilde{N}_N$  också är oberoende standardiserade normalfördelade stokastiska vektorvariabler. Lösningen till den stokastiska differentialekvationen blir alltså i detta fall densamma som lösningen till den deterministiska ekvationen sammansatt med en i efterhand pålagd Brownsk diffusion på  $SO(3)$

$$Q_{stok} = B_{SO(3)} Q_0$$

- Samma argument ger också att  $Q_{stok} = Q_0 \tilde{B}_{SO(3)}$
- Motsvarande resultat gäller *inte* på allmänna Liegrupper som  $SE(3)$ , ty då bevaras inte "standardiseringen" av den stokastiska vektorn  $B$  vid operationen  $B \mapsto e^A B e^{-A}$

### 5.5 Feluppskattningar

Ovanstående metod kan också användas för att göra precisa feluppskattningar för en  $k$ :te ordningens integrationsmetod om man har supremumuppskattningar av  $k + 1$ :a derivatan av funktionen  $\Omega(t)$ . De explicita uttrycken är dock för närvarande ännu inte färdiga.

## Kapitel 6

### Algoritmer och numeriska resultat

Vi har gjort jämförelser mellan vänsterinvarianta integrationsmetoder och klassiska integrationsalgoritmer, vilka bekräftar de vänsterinvarianta algoritmernas överlägsenhet. För detaljer, se rapporten Hamberg (2000). Vidare har principerna för vänsterinvarianta integrationsalgoritmer använts för att integrera snurrors rörelser. Detta är ett fall som inte täcks av de generella variationsintegratorerna (eftersom det Hamiltonska systemet inte lever på ett cotangentknippe utan på en sfär i detta fall).





## Litteraturförteckning

Johan Hamberg. Optimering av robotprestanda: Olinjär systemteori. Technical Report FOA-R--0010627-314--SE, FOA, Styrning, Simulering och Undervattensteknik, December 2000.

Arieh Iserles, Hans Z. Munthe-Kaas, Ayvert P. Nørsett, and Antonella Zanna. Lie-group methods. *Acta Numerica*, pages 215–365, 2000.

P. C. Moan. Efficient approximation of sturm-liouville problems using lie-group methods. Numerical Analysis Reports DAMTP 1998/NA11, Department of Applied mathematics and Theretical Physics, University of Cambridge, October 1998.

Hans Munthe-Kaas. High order runge-kutta methods on manifolds. *Applied Numerical Mathematics*, 29:115–127, 1999.