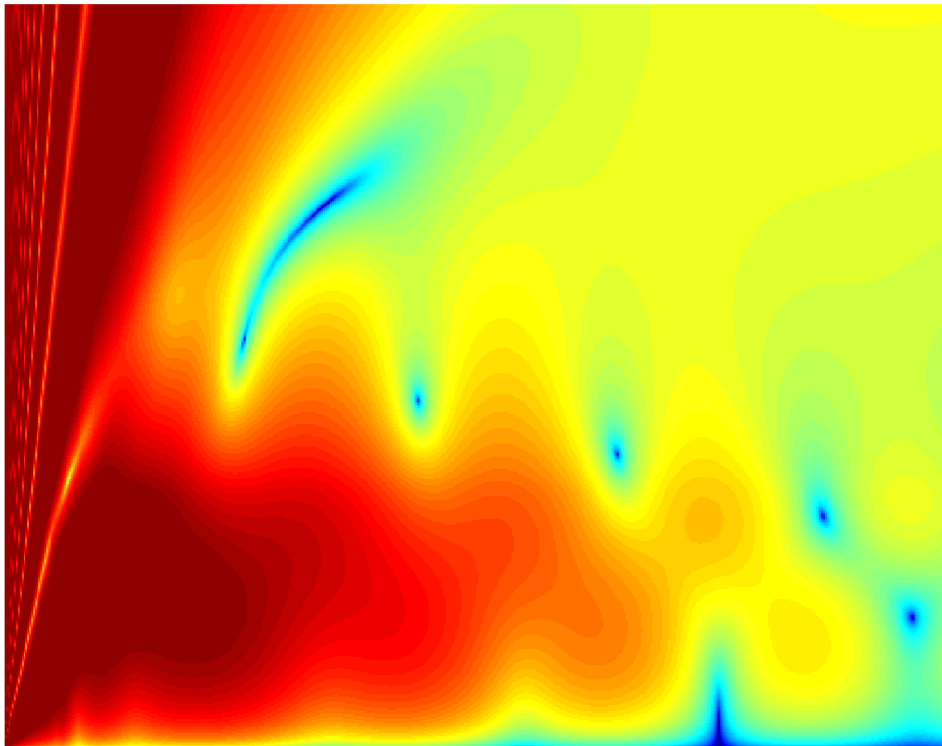


Peter Holm och Gunnar Eriksson

Parabolisk ekvationsteknik för vegetation



TOTALFÖRSVARETS FORSKNINGSINSTITUT

Ledningssystem
Box 1165
581 11 Linköping

FOI-R--0637--SE

December 2002

ISSN 1650-1942

Vetenskaplig rapport

Peter Holm och Gunnar Eriksson

Parabolisk ekvationsteknik för vegetation

Utgivare Totalförsvarets Forskningsinstitut - FOI Ledningssystem Box 1165 581 11 Linköping	Rapportnummer, ISRN FOI-R--0637--SE	Klassificering Vetenskaplig rapport
	Forskningsområde 4. Spaning och ledning	
	Månad, år December 2002	Projektnummer E7029
	Verksamhetsgren 5. Uppdragsfinansierad verksamhet	
	Delområde 41 Ledning med samband och telekom och IT-system	
	Författare/redaktör Peter Holm Gunnar Eriksson	Projektledare Åsa Waern
Godkänd av Christian Jönsson		
Uppdragsgivare/kundbeteckning HKV		
Tekniskt och/eller vetenskapligt ansvarig Bengt Lundborg		
Rapportens titel Parabolisk ekvationsteknik för vegetation		
Sammanfattning (högst 200 ord) Vegetation kan ha en kraftig inverkan på vågutbredning och således erhållen signalstyrka vid en mottagare. Detta gör naturligtvis vågutbredningsmodeller, som tar hänsyn till vegetation, mycket intressanta. Vegetationsmodeller, som försöker prediktera erhållen signalstyrka, finns men alla är i stort sett avsedda för radartillämpningar, dvs spridning av en signal mot och tillbaka från t. ex. en skogsklädd terrängyta. Någon bra modell för vågutbredning över mark som tar hänsyn till vegetationen längs med terrängen har egentligen inte funnits. I denna rapport presenteras en modell som ger vissa möjligheter att göra detta och som bygger på parabolisk ekvationsteknik. Modellen, som har tagits fram, är ny och har inte publicerats någon annanstans. Förutsättningen för modellen är dock att t. ex. en skog kan betraktas som en homogen dielektrisk skiva. Om detta är möjligt bör modellen ge ett bra resultat. De jämförelser med mätningar, som presenteras, visar också på ett relativt bra resultat. Upplösningen i experimenten är dock för liten, dvs mätpunkterna är lite för glesa, för att man definitivt ska kunna säga att modellen fungerar i de flesta typerna av terräng med vegetation.		
Nyckelord PE teknik, finit differensmetod, vegetation		
Övriga bibliografiska uppgifter	Språk Svenska	
ISSN 1650-1942	Antal sidor: 71 s.	
Distribution enligt missiv	Pris: Enligt prislista	

Issuing organization FOI – Swedish Defence Research Agency Command and Control Systems P.O. Box 1165 SE-581 11 Linköping	Report number, ISRN FOI-R--0637--SE	Report type Scientific report
	Research area code 4. C4ISR	
	Month year December 2002	Project no. E7029
	Customers code 5. Commissioned Research	
	Sub area code 41 C4I	
Author/s (editor/s) Peter Holm Gunnar Eriksson	Project manager Åsa Waern	
	Approved by Christian Jönsson	
	Sponsoring agency HKV	
	Scientifically and technically responsible Bengt Lundborg	
Report title (In translation) Parabolic equation technique for vegetation		
Abstract (not more than 200 words) <p>Vegetation can have a major influence on wave propagation and thus on received signal strength. This makes, of course, wave propagation models that consider vegetation effects very interesting. Vegetation models that compute field strength exist but all these models are, more or less, for radar applications, i.e. backscattering of a signal from a surface covered by forest, for instance. No good wave propagation model over terrain exists that considers the effect of the vegetation. In this report, a model is presented that to some extent is able to do that and which is based on parabolic equation technique. The developed model is new and has not been published anywhere else. It assumes, however, that a vegetation area, such as a forest, can be approximated by a homogenous dielectric slab. If such an approximation is possible, the model should give a good result. The performed and presented comparison between theory and experiments shows also a good result. However, the resolution in the experimental data is not sufficient to state that the model works for all types of terrain with vegetation.</p>		
Keywords PE technique, finite difference method, vegetation		
Further bibliographic information	Language Swedish	
ISSN 1650-1942	Pages 71 p.	
	Price acc. to pricelist	

Innehåll

1 Inledning	7
2 Paraboliska ekvationen	8
2.1 Paraboliska standardevkvationen.....	8
2.2 Paraboliska ekvationen i tre dimensioner.....	9
2.3 Modellering av vågutbredning över jämn sfärisk jord med hjälp av den paraboliska ekvationen	10
2.4 Radartvårsnittberäkningar med hjälp av en parabolisk vågekvation.....	12
2.5 Claerbouts ekvation	13
3 Finita differensmetoden	16
3.1 Finita differensmetoden för paraboliska standardevkvationen	16
3.2 Modellering av randen för standardevkvationen	18
3.3 Finita differensmetoden för Claerbouts ekvation	21
3.4 Modellering av randen för Claerbouts ekvation	22
4 Modellering av källan	24
5 Sampling och trunkering	26
6 Terräng	28
6.1 Diffrakterande terränghinder.....	28
6.1.1 Teori.....	28
6.1.2 Differensschema.....	30
6.2 Vegetation	31
7 Numeriska exempel	33
7.1 Resultat för plan mark	33
7.2 Jämförelser med mätningar.....	62
7.2.1 Mätssystem och mätuppställning.....	62
7.2.2 Modellering av terräng och källa	63
7.2.3 Resultat.....	64
8 Slutsatser	69
9 Referenser	70

1 Inledning

Under åren 2000 - 2002 har Försvarsmaktsprojektet Radiokanalen, inom FOI avdelning Ledningssystem och institution Informationsöverföring, studerat vegetationens inverkan på radiovågutbredning på uppdrag från försvarets forsknings- och teknikutvecklingsgrupp. Projektet har betraktats som ett basprojekt inom området radiovågors utbredning och har därigenom bidragit till att säkra en långsiktig kompetensuppbyggnad på området.

Målen för projekt Radiokanalen har varit att, med inriktning mot radiokanals inverkan på robusta bredbandiga radiokommunikationssystem:

- Utveckla modeller för planeringsverktyg
- Ta fram underlag för simulering/värdering av radiosystem, komplexa antensystem och mobila radionät
- Bevaka utvecklingen på området

Radiokanalen är en gränssättande faktor vad det gäller trådlös kommunikation och därmed har den en avgörande betydelse för ett väl fungerande ledningssystem. Den ökade rörligheten på stridsfältet, sensorteknikutvecklingen och ett allmänt ökande informationsflöde leder till större krav på förståelsen av radiokanalen och hur den skall beskrivas i termer av bredbandighet, kapacitet, tillgänglighet och dynamik. Behovet av system med smygegenskaper och robusthet mot såväl aktiv störning som besvärliga vågutbredningsförhållanden är stort.

Generellt kommer den nya kunskapen kunna tillämpas vid design av nya radiosystem, vid strategisk och taktisk radio/frekvens-planering, värdering av telekrigsinsatser, simulering av mobila radionät samt för satellitkommunikation. Som en del i denna kunskap ingår utvecklingen av beräkningsmodeller för användning i planeringsverktyg och i denna rapport ges den teoretiska bakgrunden till en utvecklad modell som bygger på parabolisk ekvationsteknik. Rapporten presenterar även jämförelser med mätningar.

2 Paraboliska ekvationen

Det finns tillämpningar där det är möjligt att lösa vågekvationen numeriskt i tre dimensioner. Vid vågutbredning i kuperad terräng är detta dock normalt inte möjligt, eftersom det här ofta är fråga om att vågekvationen ska lösas i ett mycket stort område. Av beräkningstekniska skäl bör beräkningscellens sidor, dvs. beräkningsstegen, inte vara större än ett par våglängder.

Ett sätt att göra en numerisk lösning av vågekvationen möjlig för ett större terrängavsnitt är att reducera antalet dimensioner. Genom att anta att vågutbredningen bara behöver beskrivas i det tvådimensionella planet som höjden (z -axeln) och den kortaste sträckan mellan antennerna (x -axeln) bildar reduceras antalet dimensioner till två. Om man dessutom antar att energitransporten i huvudsak sker längs x -axeln kan den ursprungliga vågekvationen i tre dimensioner approximeras med en tvådimensionell parabolisk ekvation som är betydligt enklare att lösa numeriskt [Levy, 2000]. Detta innebär dock att ingen hänsyn tas till flervägsutbredning, vilket kan ge stora fel då spridning och reflektion från objekt vid sidan av det tvådimensionella planet ej är försumbara.

Lösning av paraboliska vågekvationer kan delas in i två kategorier: finita differensmetoder och fourier/split-step-teknik. Vanligtvis är finita differensmetoden mer beräkningskrävande men har den fördelen att implementationen av randvillkoren kan ske på ett enkelt sätt. Fourier/split-step tekniken är beräkningseffektiv men kan medföra en del svårigheter vad det gäller implementationen av randvillkoren, vilka måste anges i transformdomänen. I denna rapport ska vi dock bara använda oss av finita differensmetoden. Anledningen till detta val är att finita differensmetoden är betydligt enklare att implementera och ger därmed ett snabbare svar på om den paraboliska ekvationsmetoden (PE-metoden) är möjlig att använda vid vågutbredning i vegetation, dvs. skog.

2.1 Paraboliska standardekvationen

Den skalära vågekvationen i tre dimensioner kan skrivas som

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2 \psi = 0, \quad (1)$$

där ψ är en lämplig komponent av det elektromagnetiska fältet, k är vågtalet och n är brytningsindex. Antagandet att vågutbredningen bara behöver beskrivas i det tvådimensionella planet som höjden (z -axeln) och den kortaste sträckan mellan antennerna (x -axeln) ger således den förenklade vågekvationen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Nästa steg i förenklingen är att anta att energitransporten i huvudsak sker i x -riktningen, vilket innebär att man söker en lösning som kan skrivas på en form där fältets huvudsakliga oscillation faktoriseras bort genom ansatsen

$$\psi(x, z) = e^{ikx} u(x, z), \quad (3)$$

vilket i sin tur ger vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial x} + k^2 (n^2 - 1)u = 0. \quad (4)$$

För att slutligen erhålla den så kallade paraboliska standardekvationen måste man anta att

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \ll \left| 2ik \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad (5)$$

gäller, för att därmed kunna approximera vågekvationen med

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial x} + k^2 (n^2 - 1)u = 0. \quad (6)$$

Approximationen i (6) motsvarar den så kallade paraboliska (eller paraxiala) approximationen. Effekten av denna approximation är att ingen hänsyn tas till bakåtspridning och att lösningen är begränsad till fält med mer eller mindre horisontell utbredningsriktning. Med detta menas här en utbredningsriktning som ej avviker från horisontalplanet med mera än 15° . T. ex. bör direktvägen mellan sändaren och mottagaren inte ha en lutning större än 15° för att en bra lösning ska erhållas.

Det finns sätt eller metoder att öka den maximalt tillåtna lutningen hos lösningen. En vidareutveckling av (6) som vi kommer att använda oss av i denna rapport är Claerbout-ekvationen, som är en differentialekvation av första ordningen med avseende på x . Det som nämligen gör denna och paraboliska ekvationer intressanta är att de kan lösas numeriskt på ett effektivt sätt. Detta beror till stor del på att de är första ordningens differentialekvationer med avseende på åtminstone en variabel (x i denna rapport).

2.2 Parabolisk ekvation i tre dimensioner

Den tvådimensionella paraboliska standardekvationen tar inte hänsyn till att man kan ha andra utbredningsvägar mellan terminalerna än de som ligger i xz -planet och den tillåter inte att strålriktningar avviker med mera än 15° relativt horisontalplanet. Denna begränsning kan naturligtvis ge upphov till fel, som man gärna skulle vilja korrigera. I en

artikel av Zelle och Constantinou [1999] har man försökt göra detta. Det man gör är att anta att funktionen u även har ett y -beroende, men att energitransporten i huvudsak fortfarande sker i x -riktningen, dvs. man gör ansatsen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial x} + k^2(n^2 - 1)u = 0, \quad (7)$$

vilket man kallar den tredimensionella paraboliska ekvationen (3D PE). Eftersom energitransporten i huvudsak antas ske i x -riktningen kan lösningen fortfarande skrivas på formen $\psi = e^{ikx} u$. Skillnaden här är att ψ och u nu även har ett y -beroende. Ekvationen är dock symmetrisk med avseende på y - och z -koordinaten, vilket innebär att vi har samma begränsning i utbredningsriktning i xy -planet som i xz -planet, dvs. olika utbredningsriktningar får ej avvika mer än 15° från x -axeln.

Metoden av Zelle och Constantinou är således ingen riktig 3D-metod, vilket man bör notera. Finns det viktig flervägsutbredning med stora fördröjningar (dvs. med utbredningsriktningar som skiljer sig mycket från x -riktningen) så kommer denna metod att ge felaktigt resultat eftersom dessa komponenter helt enkelt inte finns med. De jämförelser med experiment som har gjorts visar dock inte på några sådana effekter, utan visar på ganska bra överensstämmelse [Zelle och Constantinou, 1999]. Anm.: Ekvationen som har lösts numeriskt i [Zelle och Constantinou, 1999] är 3D-ekvationen (7) för $n=1$.

2.3 Modellering av vågutbredning över jämn sfärisk jord med hjälp av den paraboliska vågekvationen

En central tillämpning av paraboliska ekvationstekniken är vågutbredning i troposfären över jämn sfärisk jord. För att ta hänsyn till att jorden inte är plan för stora avstånd måste man här använda någon form av koordinattransformation, vilken transformerar ekvationen till att gälla över plan jord. Det sista är av stor betydelse eftersom man vill kunna anta att energitransporten i huvudsak sker i en riktning, x -riktningen, och därmed kunna eliminera en snabbt varierande fasfaktor e^{ikx} .

För plan jord är det ganska trivialt att ställa upp den ekvation som ska lösas. Med antagandet att vågutbredningen bara behöver beskrivas i ett tvådimensionellt plan, som spänns upp av z -axeln (höjden) och x -axeln (kortaste sträckan mellan antennerna), fås i detta fall den förenklade skalära vågekvationen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2 \psi = 0, \quad (8)$$

där ψ är en lämplig komponent av det elektromagnetiska fältet, k är vågtalet och n är brytningsindex. För plan jord kan beroendet hos brytningsindex skrivas som: $n = n(x, z)$. För en sfärisk jord har vi inte detta beroende mer än approximativt. Här kan i sfäriska koordinater beroendet skrivas som: $n = n(d, b)$, där $d = a\theta$, $b = r - a$ och a är jordens radie.

Lösning man söker för en sfärisk jord är den så kallade markvågen som utbreder sig längs markytan och som har fasfaktorn e^{ikd} . Ett naturligt sätt att angripa problemet är naturligtvis att försöka använda en koordinatstransformation som rätar ut den krökta jordytan så att avståndet d längs markytan motsvarar x i det vanliga kartesiska koordinatsystemet. Här ska vi inte gå in på detaljerna kring transformationen utan bara visa resultatet, vilket är [Levy, 2000]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + k^2 m^2 \psi = 0, \quad (9)$$

där

$$\rho = a \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \quad (10)$$

och m är det modifierade brytningsindex, vilket kan skrivas som

$$m = m(d, b) = n(d, b) + \frac{b}{a}. \quad (11)$$

För små höjder kan ρ approximeras med b , vilket ger den mer kända formen av våg-ekvationen för jämn sfärisk jord, dvs. ekvationen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} + k^2 \left(n(d, b) + \frac{b}{a} \right)^2 \psi = 0. \quad (12)$$

För stora höjder bör man dock använda den tidigare ekvationen (9), vilken faktiskt inte är svårare att lösa numeriskt än den senare. Den paraboliska formen av (12) kan vidare skrivas som:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial d} + k^2 \left[\left(n(d, b) + \frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right] \psi = 0, \quad (13)$$

där x och z nu är ersatta med avståndet d längs med jordytan respektive höjden b ovanför jordytan.

Om vi nu tänker oss en verklig terräng så kan denna normalt inte beskrivas med en jämn sfärisk yta. Det vanligaste sättet att beskriva kuperad terräng är att approximera den med styckvis linjära segment. Även i det här fallet kan man åstadkomma en plan markyta genom en transformation av koordinaterna, men det måste göras segment för segment. Denna teknik brukar kallas "shift map" och är i sitt ursprungsutförande inte giltig för stora vinklar, dvs. utbredningsriktningar som avviker mycket relativt huvudriktningen (x -riktningen). Vinklarna bör ej vara större än ca. 15° , se referens [Beilis och Tappert, 1979] och [Barrios, 1994]. I en artikel av Donohue och Kuttler [2000] förbättrar man den så kallade "shift map" tekniken så att den gäller för vinklar upp till ca. 30° . Metoden kallas följaktligen för "wide-angle shift map". Det här ökar naturligtvis möjligheterna att använda paraboliska ekvationstekniken även för mycket kuperad terräng. I avsnitt 6 kom-

mer vi vidare att ta fram en PE-modell för kuperad terräng med hjälp av artikeln av Donohue och Kuttler [2000].

2.4 Radartvärsnittsberäkningar med hjälp av en parabolisk vågekvation

Paraboliska vågekvationer har tidigare inte haft någon tillämpning inom området radartvärsnittsberäkningar. I en artikel av Zaporozhets och Levy [1999] beskrivs dock en parabolisk ekvationsmetod för beräkning av just radartvärsnitt.

Ett av problemen vid beräkning av radartvärsnitt är att spridningen sker mot tredimensionella objekt, dvs. objekt med en begränsad yta. Här måste problemet beskrivas i tre dimensioner, där fältet helst bör vara på vektorform. Den tredimensionella paraboliska ekvationen (3-D PE), vilken kan skrivas som

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial x} + k^2(n^2 - 1)u = 0, \quad (14)$$

gäller approximativt i tre dimensioner men för ett skalärt fält. För att erhålla en vektorform av 3-D PE ekvationen utnyttjar Zaporozhets och Levy [1999] att det spridda fältet ska vara divergensfritt, dvs. sakna källor, vilket innebär att

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^s = \frac{\partial E_x^s}{\partial x} + \frac{\partial E_y^s}{\partial y} + \frac{\partial E_z^s}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

ska vara uppfyllt, där \mathbf{E}^s är det spridda fältet. Med $\mathbf{E}^s(x, y, z) = e^{ikx} \mathbf{u}^s(x, y, z)$ ger ekvation (15) villkoret

$$\frac{\partial u_x^s}{\partial x} + ik u_x^s + \frac{\partial u_y^s}{\partial y} + \frac{\partial u_z^s}{\partial z} = 0. \quad (16)$$

Utgående från ekvation (16) kan en så kallad parabolisk vektorekvation erhållas. Med antagandet att $n=1$ kan 3-D PE ekvationen ovan, dvs. ekvation (14), skrivas som [Zaporozhets och Levy, 1999]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (17)$$

Om vi nu gör bytet $u \rightarrow u_x$ i (17) och använder uttrycket eller villkoret i (16) erhåller vi ekvationen

$$\frac{i}{2k} \left(\frac{\partial^2 u_x^s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_x^s}{\partial y^2} \right) + ik u_x^s + \frac{\partial u_y^s}{\partial y} + \frac{\partial u_z^s}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

vilket skulle vara den så kallade paraboliska vektorekvationen (vektor PE).

Den paraboliska vektorekvationen har lösts numeriskt i [Zaporozhets och Levy, 1999] för några exempel. Spridarna antas vara oändligt ledande, vilket innebär att villkoret $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, som också kan skrivas som

$$\begin{cases} n_y E_z - n_z E_y = 0 \\ n_z E_x - n_x E_z = 0, \\ n_x E_y - n_y E_x = 0 \end{cases} \quad (19)$$

ska vara uppfyllt på spridarnas yta, där $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ är ytnormalen. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$ är här det totala fältet, där \mathbf{E}^i det infallande och $\mathbf{E}^s = e^{ikx} \mathbf{u}^s$ det spridda fältet. Om det infallande fältet är känt, vilket man får utgå ifrån att det är, ger detta randvillkoren

$$\begin{cases} n_y E_z^i - n_z E_y^i + e^{ikx} (n_y u_z^s - n_z u_y^s) = 0 \\ n_z E_x^i - n_x E_z^i + e^{ikx} (n_z u_x^s - n_x u_z^s) = 0 \\ n_x E_y^i - n_y E_x^i + e^{ikx} (n_x u_y^s - n_y u_x^s) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

för vilka den paraboliska vektorekvationen löses numeriskt genom att ”marschera” över spridarens yta i x -riktningen. I [Zaporozhets och Levy, 1999] visas resultaten i form av bistatiska radartvärnsnitt (RCS), bl. a. för en sfär med radien 5λ . För beräkning av det bistatiska radartvärnsnittet hänvisar vi till artikeln av Zaporozhets och Levy [1999].

De presenterade resultaten är bra, förutom de som visar spridning från objekt med små dimensioner. En nackdel med metoden i [Zaporozhets och Levy, 1999] är att ”creeping waves” eller krypande vågor inte hanteras på ett riktigt sätt inom den så kallade paraboliska (paraxiala) approximationen. För små spridare kan nämligen dessa vågor, vilka kryper runt objektet, få betydelse för resultatet. Å andra sidan finns det fördelar såsom möjlighet att ta hänsyn till varierande brytningsindex hos troposfären, vilket inte traditionella spridningsmodeller såsom GTD (geometrical theory of diffraction) medger utan svårigheter. Beräkningsgången skulle då bli att beräkna ett spritt fält nära objektet som sedan kopplas till en vanlig standard PE-lösning för stora avstånd, istället för att direkt beräkna ett radartvärnsnitt för stora avstånd.

2.5 Claerbouts ekvation

Den paraboliska standardekvationen har som tidigare nämnts en del begränsningar. Lösningen till denna ekvation inkluderar t.ex. ingen bakåtspridning. Vidare är lösningen begränsad till fält med mer eller mindre horisontell utbredningsriktning, dvs. direktvägen mellan sändaren och mottagaren bör t. ex. inte ha en lutning större än 15° för att lösningen ska vara någorlunda riktig.

Det finns ett antal olika sätt att modifiera den paraboliska standardekvationen för att lösningen även ska vara bra för lite större vinklar. I detta avsnitt kommer vi bara att ta upp en modifiering som lämpar sig bra att lösa med finita differensmetoden, nämligen Claerbouts ekvation.

Ekvation (4) kan approximativt skrivas om med hjälp av en operator. Om vi definierar operatoren \mathcal{Q} som

$$\mathcal{Q} = \sqrt{\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2(x, x)}, \quad (21)$$

kan ekvation (4) approximativt skrivas om som [Levy, 2000]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik(1 - \mathcal{Q}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + ik(1 + \mathcal{Q}) \right) u = 0. \quad (22)$$

För att (22) ska vara en bra approximation av (4) måste brytningsindexet n variera långsamt med avseende på x . Om n approximativt kan antas vara oberoende av x kommuterar nämligen de två operatorerna i (22), vilket är en förutsättning för att ekvationen ska vara en bra approximation av (21). Låt oss nu anta att så är fallet och dela upp (22) i följande två ekvationer:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik(1 - \mathcal{Q}) \right) u = 0 \quad (23)$$

och

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik(1 + \mathcal{Q}) \right) u = 0. \quad (24)$$

Båda representerar en möjlig lösning, men det är bara ekvation (23) som representerar vågutbredning i framåtriktningen och som vi således är intresserade av.

Om vi nu definierar operatoren

$$Z = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2(x, x) - 1 \quad (25)$$

kan (23) skrivas som

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik(1 - \sqrt{1 + Z}) \right) u = 0. \quad (26)$$

Det intressanta med ekvation (26) är att den vanliga paraboliska standardekvationen fås för första ordningens Taylor utveckling av kvadratroten, dvs. för utvecklingen

$$\sqrt{1 + Z} \approx 1 + \frac{1}{2} Z. \quad (27)$$

En noggrannare approximation av kvadratroten än (27) bör således kunna ge en bättre lösning, dvs. en lösning som ger ett bättre resultat för lite större vinklar. I boken av Levy [2000] presenteras en så kallad padéapproximation, vilken har den trevliga egenskapen att den ger ett stabilt differensschema vid användning av finita differensmetoden. Den approximation av $\sqrt{1 + Z}$ som det är fråga om är följande uttryck:

$$\sqrt{1+Z} \approx \frac{1+\frac{3}{4}Z}{1+\frac{1}{4}Z}, \quad (28)$$

vilket från (26) ger ekvationen

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + ik \left(1 - \frac{1+\frac{3}{4}Z}{1+\frac{1}{4}Z} \right) \right] u = 0. \quad (29)$$

En omskrivning av (29) ger nu slutligen den så kallade Claerbouts ekvation

$$\left(1 + \frac{Z}{4} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - ik \frac{Z}{2} u = 0, \quad (30)$$

vilken med hjälp av (25) kan skrivas som

$$\frac{1}{4k^2} \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{n^2 + 3}{4} \frac{\partial u}{\partial x} - ik \frac{n^2 - 1}{2} u = 0. \quad (31)$$

Ekvation (31) är användbar för utbredningsriktningar på upp till 45° i förhållande till paraxialriktningen, vilket är en avsevärd förbättring i förhållande till den paraboliska standardeviationens begränsning på 15°.

3 Finita differensmetoden

Som tidigare nämnts kan PE-metoderna delas in i två kategorier: finit differens teknik och fourier/split-step teknik. Fourier/split-step tekniken är beräkningseffektiv och är egentligen att föredra. Men eftersom denna innebär flera teoretiska komplikationer och kommer att ta mer tid att implementera, väljer vi att använda finita differensmetoden, som är betydligt enklare att implementera. Målet med denna rapport är inte att utveckla ett effektivt PE-program, utan bara se om PE-tekniken kan användas för att göra vågutbredningsberäkningar i områden med skog. Tanken här är att skog kan modelleras i en PE-modell via brytningsindex. Eftersom de flesta mätningar pekar på att brytningsindex för skog ligger ganska nära 1, dvs. nära värdet för luft, bör detta vara möjligt. Ett krav i PE-tekniken är nämligen att gradienten för brytningsindex inte får vara för stor, vilket den inte bör vara för värden nära 1.

3.1 Finita differensmetoden för paraboliska standardekvationen

Standardekvationen, som vi här ska ställa upp ett differensschema för, ser ut som följer:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial x} + k^2(n^2 - 1)u = 0. \quad (32)$$

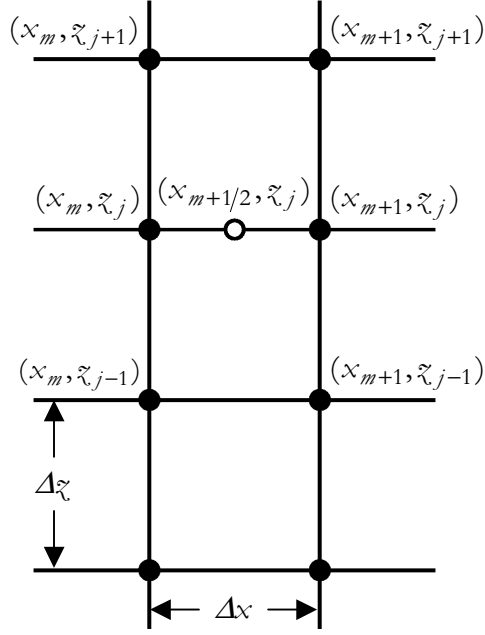
Det är således derivatorna med avseende på x och ζ i (32) som ska bestämmas numeriskt. Bestämningen sker vidare i en grid med ekvidistant avstånd i både x - och ζ -led, där steglängderna Δx och $\Delta \zeta$ inte nödvändigtvis är lika, se figur 1. Andra-derivatan med avseende på ζ kräver tre punkter för att kunna approximeras. Däremot kräver första-derivatan med avseende på x bara två punkter. Det är detta som gör att den paraboliska ekvationen är någorlunda enkel att lösa numeriskt. Vet man alla värden i ett snitt i ζ -led för ett initialt x -värde kan, som vi snart ska se, alla värden i nästa snitt bestämmas. Man marscherar således i x -led fram till den punkt man är intresserad av och för varje nytt steg i x -riktningen bestäms ett nytt snitt i ζ -led.

Låt oss först nu definiera funktionen u i gridpunkterna som

$$u_j^m = u(x_m, \zeta_j) \quad (33)$$

och $x_{m+1/2}$ som

$$x_{m+1/2} = \frac{x_{m+1} + x_m}{2}. \quad (34)$$



Figur 1. Finit differensgrid för Crank-Nicolson-schema. Punkten markerad med en ring är den fiktiva punkten för vilken den approximativa paraboliska ekvationen ställs upp.

Anledningen till att vi definierar mittpunkten mellan två närliggande x -värden, dvs. $x_{m+1/2}$, är att första-derivatan med avseende på x approximeras bäst i mittpunkten. Differensschemat bör således ställas upp för mittpunkten mellan två snitt i z -riktningen, se figur 1. Följaktligen definierar vi följande två storheter:

$$u_j^{m+1/2} = \frac{u_j^{m+1} + u_j^m}{2} = u(x_{m+1/2}, z_j) \quad (35)$$

och

$$n_j^{m+1/2} = \frac{n_j^{m+1} + n_j^m}{2} = n(x_{m+1/2}, z_j). \quad (36)$$

Detta leder till ett differensschema av så kallad Crank-Nicolsons typ. Första-derivatan i punkten $(x_{m+1/2}, z_j)$ med avseende på x kan approximativt skrivas som

$$\frac{\partial u(x_{m+1/2}, z_j)}{\partial x} = \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta x} \quad (37)$$

och andra-derivatan med avseende på z som

$$\frac{\partial^2 u(x_{m+1/2}, z_j)}{\partial z^2} = \frac{u_{j+1}^{m+1/2} - 2u_j^{m+1/2} + u_{j-1}^{m+1/2}}{\Delta z^2}, \quad (38)$$

vilket med definitionen i (35) slutligen ger att andra-derivatan approximativt kan skrivas som

$$\frac{\partial^2 u(x_{m+1/2}, \bar{z}_j)}{\partial \bar{z}^2} = \frac{u_{j+1}^{m+1} + u_{j+1}^m - 2(u_j^{m+1} + u_j^m) + u_{j-1}^{m+1} + u_{j-1}^m}{2\Delta \bar{z}^2}. \quad (39)$$

Den paraboliska standardekvation (32) kan nu för den fiktiva punkten $(x_{m+1/2}, \bar{z}_j)$ approximativt skrivas som (se figur 1)

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j+1}^{m+1} + u_{j+1}^m - 2(u_j^{m+1} + u_j^m) + u_{j-1}^{m+1} + u_{j-1}^m}{2\Delta \bar{z}^2} + 2ik \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta x} \\ & + k^2 \left(\frac{(n_j^{m+1} + n_j^m)^2}{4} - 1 \right) \frac{u_j^{m+1} + u_j^m}{2} = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

vilket ger att

$$u_{j+1}^{m+1} + (a_j^{m+1/2} + b - 2)u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1} = -u_{j+1}^m - (a_j^{m+1/2} + \bar{b} - 2)u_j^m - u_{j-1}^m, \quad (41)$$

där

$$a_j^{m+1/2} = k^2 \Delta \bar{z}^2 \left(\frac{(n_j^{m+1} + n_j^m)^2}{4} - 1 \right), \quad (42)$$

$$b = 4ik \frac{\Delta \bar{z}^2}{\Delta x}, \quad (43)$$

och \bar{b} är komplexkonjugatet av b . Här kan man direkt se att om alla $u_j^m (j = 0, 1, 2, \dots)$ är kända i ett snitt $x = x_m$, så kan vi beräkna alla $u_j^{m+1} (j = 0, 1, 2, \dots)$ i snittet $x = x_{m+1}$. Ekvation (41) till (43) är i omvänd ordning precis ekvation (3.79) till (3.81) i [Levy, 2000].

Problemet skulle nu vara löst om det inte vore för att man måste börja och sluta någonstans i \bar{z} -led, dvs. vi har två ränder där lösningen måste uppfylla lämpliga villkor. Nedtill har vi jordytan, vilken av naturliga skäl får index $j = 0$. Upptill har vi egentligen ingen uttalad rand, men vi måste på ett eller annat sätt avbryta beräkningen i höjddled för att få ett ändligt beräkningsområde. I nästa avsnitt ställs randvillkor upp för en jordyta. Litet senare i avsnitt 5 kommer vi också beskriva hur lösningen kan trunkeras i höjddled.

3.2 Modellering av randen för standardekvation

Randen som jordytan bildar är ganska rätt fram att beskriva matematiskt, åtminstone då det är fråga om att använda finita differensmetoden. Ett randvillkor som kan användas är Leontovichs villkor och kan skrivas som [Levy, 2000]

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial \bar{z}} + \eta(x) u(x, 0) = 0, \quad (44)$$

där

$$\eta(x) = \begin{cases} ik\sqrt{\mathcal{E}(x)-1} & \text{för horisontell polarisation} \\ \frac{ik\sqrt{\mathcal{E}(x)-1}}{\mathcal{E}(x)} & \text{för vertikal polarisation} \end{cases} \quad (45)$$

och $\mathcal{E}(x)$ är jordens komplexa dielektricitetskonstant, vilken generellt beror på avståndet x . Vidare gäller (45) för små bstrykningsvinklar för vilka sinus och cosinus approximativt är lika med 0 respektive 1.

Randvillkoret i (44) används genom att andraderivatan med avseende på ζ skrivs om något [Levy, 2000]. Andraderivatan vid jordytan kan approximativt skrivas som

$$\frac{\partial^2 u(x_{m+1/2}, 0)}{\partial \zeta^2} = 2 \frac{\frac{\partial u(x_{m+1/2}, \Delta\zeta/2)}{\partial \zeta} - \frac{\partial u(x_{m+1/2}, 0)}{\partial \zeta}}{\Delta\zeta}, \quad (46)$$

där $x_{m+1/2}$ är den mittpunkt med avseende på x som beräkningen sker kring. Man bör här notera att högerledet egentligen bäst approximerar derivatan i punkten $(x_{m+1/2}, \Delta\zeta/4)$ och inte i $(x_{m+1/2}, 0)$ som man skulle önska, något man dock får acceptera i det här fallet. Används nu (44) och approximationen

$$\frac{\partial u(x_{m+1/2}, \Delta\zeta/2)}{\partial \zeta} = \frac{u(x_{m+1/2}, \Delta\zeta) - u(x_{m+1/2}, 0)}{\Delta\zeta} \quad (47)$$

fås andra-derivatan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_{m+1/2}, 0)}{\partial \zeta^2} &= 2 \frac{\frac{u(x_{m+1/2}, \Delta\zeta) - u(x_{m+1/2}, 0)}{\Delta\zeta} + \eta(x_{m+1/2})u(x_{m+1/2}, 0)}{\Delta\zeta} \\ &= 2 \frac{u_1^{m+1/2} - u_0^{m+1/2} + \Delta\zeta \eta^{m+1/2} u_0^{m+1/2}}{\Delta\zeta^2} \end{aligned} \quad (48)$$

vilket i linje med definitionerna i (33) t.o.m. (36) kan skrivas som

$$\frac{\partial^2 u(x_{m+1/2}, 0)}{\partial \zeta^2} = \frac{u_1^{m+1} + u_1^m - u_0^{m+1} - u_0^m + \Delta\zeta \eta^{m+1/2} (u_0^{m+1} + u_0^m)}{\Delta\zeta^2}, \quad (49)$$

där $\eta^{m+1/2}$ är medelvärdet

$$\eta^{m+1/2} = \frac{\eta^{m+1} + \eta^m}{2} = \frac{\eta(x_{m+1}) + \eta(x_m)}{2}. \quad (50)$$

Vi har nu möjlighet att ställa upp en ekvation liknande den i (41), men modifierad för att beskriva den rand som jordytan bildar. Genom att i (32) använda andra-derivatan i (49), istället för den i (38), erhåller vi uttrycket

$$u_1^{m+1} + \left(\frac{a_0^{m+1/2} + b - 2}{2} + \eta^{m+1/2} \Delta \bar{x} \right) u_0^{m+1} = -u_1^m - \left(\frac{a_0^{m+1/2} + \bar{b} - 2}{2} + \eta^{m+1/2} \Delta \bar{x} \right) u_0^m \quad (51)$$

för randen som jordytan bildar, där $a_0^{m+1/2}$ och b är definierade i (42) respektive (43). Ekvation (51) motsvarar den något felaktigt uppställda ekvation (9.35) i [Levy, 2000].

Om vi slutligen i (41) och (51) definierar α_j^m och β_j^m som

$$\alpha_j^m = \begin{cases} a_j^{m+1/2} + b - 2 & \text{för } j = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{a_0^{m+1/2} + b - 2}{2} + \eta^{m+1/2} \Delta \bar{x} & \text{för } j = 0 \end{cases} \quad (52)$$

respektive

$$\beta_j^m = \begin{cases} a_j^{m+1/2} + \bar{b} - 2 & \text{för } j = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{a_0^{m+1/2} + \bar{b} - 2}{2} + \eta^{m+1/2} \Delta \bar{x} & \text{för } j = 0 \end{cases} \quad (53)$$

kan differensschemat skrivas på följande matrisform:

$$\mathbf{A}_m \mathbf{U}_{m+1} = \mathbf{B}_m \mathbf{U}_m, \quad (54)$$

där det obekanta fältet

$$\mathbf{U}_{m+1} = \begin{pmatrix} u_0^{m+1} \\ u_1^{m+1} \\ \vdots \\ u_N^{m+1} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

beräknas ur systemmatriserna

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} \alpha_0^m & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1^m & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2^m & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{N-1}^m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_N^m \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} -\beta_0^m & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\beta_1^m & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\beta_2^m & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -\beta_{N-1}^m & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\beta_N^m \end{pmatrix} \quad (57)$$

och det kända fältet \mathbf{U}_m i det föregående snittet.

3.3 Finita differensmetoden för Claerbouts ekvation

För stora avstånd bör man ta hänsyn till att jordytan är krökt. En ekvation som då kan användas är den paraboliska ekvationen (13), dvs. den vanliga paraboliska standardekvationen med brytningsindexet n ersatt med det modifierade indexet m i ekvation (11). Detta kommer dock inte alltid ge ett bra resultat. Det som inträffar här är att man kan ha strålar, dvs. utbredningsvägar, som bildar större vinkel med horisontalplanet än 15° och som bryts tillbaka då man befinner sig långt bort från källpunkten. En bättre ekvation i det här fallet är således Caerbouts ekvation (31), dvs. ekvationen

$$\frac{1}{4k^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \tilde{x}^2 \partial x} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{n^2 + 3}{4} \frac{\partial u}{\partial x} - ik \frac{n^2 - 1}{2} u = 0, \quad (58)$$

där det vanliga brytningsindexet n kan ersättas med det modifierade indexet m om det skulle behövas.

En väsentlig skillnad vid en jämförelse med den vanliga paraboliska standardekvationen är att (58) innehåller en tredjederivata, som följaktligen ska approximeras med en differens. Approximationer av de övriga derivatorna har redan ställts upp i ekvation (37) och (38). Ur (37) fås att

$$\frac{\partial^3 u(x_{m+1/2}, \tilde{x}_j)}{\partial \tilde{x}^2 \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta x}, \quad (59)$$

vilket med hjälp av ekvation (38) ger att

$$\frac{\partial^3 u(x_{m+1/2}, \tilde{x}_j)}{\partial \tilde{x}^2 \partial x} = \frac{1}{\Delta \tilde{x}^2} \left(\frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j+1}^m}{\Delta x} - 2 \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta x} + \frac{u_{j-1}^{m+1} - u_{j-1}^m}{\Delta x} \right). \quad (60)$$

Differenserna i (37), (39) och (60) medför nu att ekvation (58) kan approximeras som

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4k^2} \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j+1}^m - 2(u_j^{m+1} - u_j^m) + u_{j-1}^{m+1} - u_{j-1}^m}{\Delta \tilde{x}^2 \Delta x} \\ & - \frac{i}{2k} \frac{u_{j+1}^{m+1} + u_{j+1}^m - 2(u_j^{m+1} + u_j^m) + u_{j-1}^{m+1} + u_{j-1}^m}{2\Delta \tilde{x}^2} \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{(n_j^{m+1} + n_j^m)^2}{4} + 3 \right) \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta x} - \frac{ik}{2} \left(\frac{(n_j^{m+1} + n_j^m)^2}{4} - 1 \right) \frac{u_j^{m+1} + u_j^m}{2} = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

i punkten $(x_{m+1/2}, \tilde{x}_j)$, där medelvärdena i (35) och (36) har använts. Precis som tidigare kan vi slutligen erhålla

$$cu_{j+1}^{m+1} + c(a_j^{m+1/2} + b - 2)u_j^{m+1} + cu_{j-1}^{m+1} = \bar{c}u_{j+1}^m + \bar{c}(a_j^{m+1/2} + \bar{b} - 2)u_j^m + \bar{c}u_{j-1}^m, \quad (62)$$

där $a_j^{m+1/2}$ är definierad i (42),

$$b = \frac{4k^2 \Delta x^2}{1 - ik \Delta x} \quad (63)$$

och

$$c = 1 - ik \Delta x. \quad (64)$$

Notera att b här skiljer sig något från definitionen i (43). Storheterna \bar{b} och \bar{c} är vidare komplexkonjugaten av b respektive c . Vidare är motsvarigheten till ekvation (62)-(64) i boken av Levy felaktiga, jämför (3.91)-(3.93) i [Levy, 2000].

Differensschemat i (62) är mycket likt det i (41) och kommer inte att innebära någon större förändring vad det gäller beräkningstider. Modelleringen av jordytan, vilket nästa avsnitt behandlar, kommer inte heller att öka komplexiteten nämnvärt, utan slutresultatet kommer i stort sett att vara lika numeriskt effektivt som lösningen av standardekvationen.

3.4 Modellering av randen för Claerbouts ekvation

Precis som i avsnitt 3.2 är det här fråga om derivator med avseende på x som ska skrivas om så att hänsyn tas till randen, dvs. jordytan. Andra-derivatan med avseende på x är redan definierad i (48). Enligt (59) kan tredje-derivatan vid jordytan skrivas som

$$\frac{\partial^3 u(x_{m+1/2}, 0)}{\partial x^2 \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{u_0^{m+1} - u_0^m}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x_{m+1}, 0) - u(x_m, 0)). \quad (65)$$

Med hjälp av (48) kan detta skrivas som

$$\frac{\partial^3 u(x_{m+1/2}, 0)}{\partial x^2 \partial x} = \frac{2}{\Delta x} \left(\frac{u_1^{m+1} - u_0^{m+1} + \Delta x \eta^{m+1} u_0^{m+1}}{\Delta x^2} - \frac{u_1^m - u_0^m + \Delta x \eta^m u_0^m}{\Delta x^2} \right), \quad (66)$$

där η^{m+1} och η^m är $\eta(x_{m+1})$ respektive $\eta(x_m)$, definierad i (45).

Genom att i (58) sätta in uttrycket för andra-derivatan i (49) och tredje-derivatan i (66) erhåller vi

$$\begin{aligned} cu_1^{m+1} + \left(c \frac{a_0^{m+1/2} + b - 2}{2} + \eta^{m+1} \Delta x - ik \Delta x \eta^{m+1/2} \Delta x \right) u_0^{m+1} \\ = \bar{c} u_1^m + \left(\bar{c} \frac{a_0^{m+1/2} + \bar{b} - 2}{2} + \eta^m \Delta x + ik \Delta x \eta^{m+1/2} \right) u_0^m, \end{aligned} \quad (67)$$

där $a_0^{m+1/2}$, b och c är definierade i (42), (63) respektive (64). Storheterna \bar{b} och \bar{c} är som tidigare komplexkonjugaten av b respektive c .

Om vi nu slutligen definierar α_j^m och β_j^m som

$$\alpha_j^m = \begin{cases} c(a_j^{m+1/2} + b - 2) & \text{för } j = 1, 2, 3, \dots \\ c \frac{a_0^{m+1/2} + b - 2}{2} + \eta^{m+1} \Delta \bar{x} - ik \Delta x \eta^{m+1/2} \Delta \bar{x} & \text{för } j = 0 \end{cases} \quad (68)$$

respektive

$$\beta_j^m = \begin{cases} \bar{c}(a_j^{m+1/2} + \bar{b} - 2) & \text{för } j = 1, 2, 3, \dots \\ \bar{c} \frac{a_0^{m+1/2} + \bar{b} - 2}{2} + \eta^m \Delta \bar{x} + ik \Delta x \eta^{m+1/2} \Delta \bar{x} & \text{för } j = 0 \end{cases} \quad (69)$$

kan differensschemat skrivas på samma matrisform som i ekvation (54), men med matriserna

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} \alpha_0^m & c & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & \alpha_1^m & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & \alpha_2^m & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & \alpha_{N-1}^m & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & \alpha_N^m \end{pmatrix} \quad (70)$$

och

$$\mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} \beta_0^m & \bar{c} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c} & \beta_1^m & \bar{c} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c} & \beta_2^m & \bar{c} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{c} & \beta_{N-1}^m & \bar{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{c} & \beta_N^m \end{pmatrix} \quad (71)$$

istället för de som är definierade i (56) och (57) för den paraboliska standardekvationen.

Anmärkning: Någon motsvarighet till ekvation (68)-(71) finns inte i boken av Levy [2000], utan har tagits fram under detta arbete.

4 Modellering av källan

Många analytiska metoder för att beräkna t. ex. transmissionsförlusten mellan en sändare och mottagare förutsätter en rundstrålande punktkälla eller en dipolkälla. Dessa kan dock inte beskrivas på ett vettigt sätt i en differensmetod, eftersom ett sådant fält är singulärt i källpunkten. Man kan med andra ord inte lägga begynnelsevärnsnittet vid avståndet noll, där källan befinner sig. Detta skulle man vilja kunna göra, eftersom det finns en hel del resultat för de analytiska metoderna som är intressanta att jämföra med.

Nu är det inte nödvändigt att lägga ett begynnelsevärnsnitt just där källan befinner sig för att kunna använda finita differensmetoden. Det är ofta fullt tillräckligt att fältet är känt i ett tvärsnitt en liten bit bort från källan, där fältet inte är lokaliserat till en enda punkt. För att bestämma fältet en bit bort från källan måste således en annan metod användas, vilket ger en hybridmetod där finita differensmetoden ingår. En enkel metod, men fullt tillräcklig om marken kan antas vara plan vid och en bit bort från sändaren, är en tvåstrålemodell med en direkt och en markreflekterad stråle. Det fält som beräknas i ett tvärsnitt på något lämpligt avstånd med denna metod får således vara begynnelsevärnsnitt till differensmetoden.

I HF-, VHF- och UHF-området är dock inte en tvåstrålemodell tillräcklig för att beskriva fältet, åtminstone inte på marknivå. Här måste även hänsyn tas till att en ytvåg kan finnas. Den modell vi har valt att använda finns beskriven i referens [Norton, 1936-37] och gäller för en dipol ovan mark. Fältet i denna modell kan sägas bestå av tre komponenter, en direktstråle, en markreflekterad stråle och en komponent som kan associeras med en ytvåg, se figur 2. Enligt denna modell kan fältets \tilde{x} -komponent, dvs. den vertikalt polariserade delen av fältet, för en vertikal elektrisk dipol skrivas som

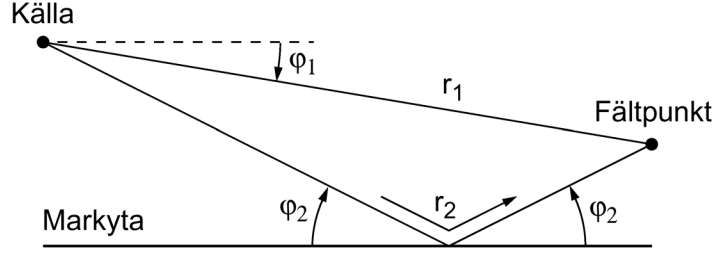
$$E_{\tilde{x}} = E_v = E_0 \left[\frac{e^{ikr_1}}{r_1} \cos^2 \varphi_1 + R_v \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \cos^2 \varphi_2 + (1 - R_v) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\cos^2 \varphi_2}{\varepsilon^2} \right) F \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right], \quad (72)$$

där

$$R_v = \frac{\varepsilon \sin \varphi_2 - \sqrt{\varepsilon - \cos^2 \varphi_2}}{\varepsilon \sin \varphi_2 + \sqrt{\varepsilon - \cos^2 \varphi_2}} \quad (73)$$

är markens reflektionskoefficient för vertikal polarisation och $\varepsilon = \varepsilon_r + i\sigma/\omega\varepsilon_0$ är den komplexa dielektricitetskonstanten för marken. Vinklarna φ_1 och φ_2 är vidare definierade i figur 2. Storheten F har med ytvågen att göra och kan skrivas på följande kompakta form:

$$F = 1 + i\sqrt{\pi w} e^{-w} \operatorname{erfc}(-i\sqrt{w}), \quad (74)$$



Figur 2. Strålgeometri för en direkt- och en markreflekterad stråle.

där

$$w = \frac{2ikr_2}{\epsilon^2} \frac{\epsilon - \cos^2 \varphi_2}{(1 - R_v)^2}. \quad (75)$$

Fältet i (72) gäller således för vertikal polarisation. För horisontell polarisation, dvs. en horisontell elektrisk dipol, är det fältet i ϕ -riktningen som är intressant, där ϕ är azimutvinkeln i cylindriska koordinater. Om dipolen antas vara riktad längs med y -axeln kan detta fält i x -riktningen enligt Norton [1936-37] skrivas som

$$E_y = E_h = E_0 \left[\frac{e^{ikr_1}}{r_1} + R_h \frac{e^{ikr_2}}{r_2} + (1 - R_h) G \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right], \quad (76)$$

där

$$R_h = \frac{\sin \varphi_2 - \sqrt{\epsilon - \cos^2 \varphi_2}}{\sin \varphi_2 + \sqrt{\epsilon - \cos^2 \varphi_2}}, \quad (77)$$

$$G = 1 + i\sqrt{\pi v} e^{-v} \operatorname{erfc}(-i\sqrt{v}) \quad (78)$$

och

$$v = 2ikr_2 \frac{\epsilon - \cos^2 \varphi_2}{(1 - R_h)^2}. \quad (79)$$

I alla numeriska exempel för plan mark (avsnitt 7.1) kommer vi att använda (72) för vertikal och (76) för horisontell polarisation för att beräkna ett begynnelsefält. Vi kommer dock att anta att fältets divergens är cylindrisk, dvs. istället för $1/r_1$ och $1/r_2$ i ekvation (72) och (76) använder vi således $1/\sqrt{r_1}$ respektive $1/\sqrt{r_2}$. Anledningen är att när vi går från ekvation (1) till (2) har vi underförstått antagit en cylindrisk divergens. Vid sfärisk divergens är nämligen inte fältet oberoende av y . Detta är nu inget problem, eftersom den storhet man ofta önskar beräkna vid en jämförelse med andra metoder är den så kallade utbredningsfaktorn. Denna relateras nämligen till dämpningen i fritt rum. När vi beräknar utbredningsfaktorn använder vi således fältet i fritt rum vid cylindrisk divergens, dvs. $E_0 e^{ikr_1} / \sqrt{r_1}$, istället för den vid sfärisk divergens, dvs. $E_0 e^{ikr_1} / r_1$.

5 Sampling och trunkering

Som tidigare har nämnts måste man avbryta beräkningen i höjdded på ett sådant sätt att inte några artificiella reflektioner genereras uppifrån. I ekvation (55), (56), (57), (70) och (71) sker trunkeringen vid höjden $z = z_N$. Trunkeringen får inte ske för abrupt, eftersom det kan ge upphov till parasitiska reflektioner. Fältet måste med andra ord dämpas ut långsamt i slutet, med början vid någon viss höjd. I [Levy, 2000] finns ett antal metoder beskrivna. Här ska vi bara beskriva metoden med ett absorberande skikt erhållet genom att vid en viss höjd applicera en filterfunktion. Ett enkelt och effektivt filter är det så kallade hanningfönstret som har formen

$$\phi(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi t) \quad (80)$$

och som uppfyller $\phi(0) = 1$ samt $\phi(1) = 0$. Detta kan användas genom att formellt definiera storheten

$$\phi_j = \begin{cases} 1 & \text{för } j < n \\ \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi(j-n)}{N-n}) & \text{för } j = n, n+1, \dots, N \end{cases} \quad (81)$$

där n är indexet för den höjd, dvs. höjden $z = z_n$, vid vilken det absorberande skiktet börjar. Det man gör, innan fältarrayen \mathbf{U}_{m+1} i (54) löses ut, är att beräkna en ny fältarray \mathbf{U}_m genom transformationen

$$\begin{pmatrix} \phi_0 u_0^m \\ \phi_1 u_1^m \\ \vdots \\ \phi_N u_N^m \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{U}_m, \quad (82)$$

som sedan används för att beräkna fältet i nästa snitt via ekvationen (54) och transformationen (82), osv. Detta är en enkel och bra metod för trunkering av lösningen uppåt och som har används i de numeriska exempel som visas senare.

I samband med trunkering uppåt måste man göra ett lämpligt val av det absorberande skiktets tjocklek. Finns det strålgångar med stora elevationsvinklar med ett icke försumbart bidrag till fältet bör en betydligt större tjocklek väljas än i fallet att det bara finns strålgångar med små vinklar. Man bör dock inte välja ett tjockare skikt än nödvändigt, eftersom beräkningsvolymen då kan bli onödigt stor och således även beräkningstiderna. Något om hur valet bör ske finns beskrivet i boken av Levy [2000]. I denna rapport och i de simuleringsexempel som redovisas senare har vi dock helt enkelt valt en tjocklek som ger ett bra resultat; för 10 kilometerssträckan har beräkningshöjden 4000 meter valts varav 2000 meter är ett absorptionsskikt; för 5 kilometerssträckorna har beräkningshöjden

2000 meter valts varav 1000 meter är ett absorptionsskikt; för 10.650 kilometerssträckan har beräkningshöjden 1000 meter valts varav 500 meter är ett absorptionsskikt. Att man här kan använda en lägre beräkningshöjd för den längsta sträckan beror på att de använda frekvenserna är högre, ungefär 1.35 –1.85 GHz. Beräkningshöjden beror till en viss del på hur mycket fresnelzonerna sticker upp i höjddled.

En annan faktor som har en stor inverkan på beräkningstiderna är hur tätt man samplar, dvs. vilka steglängder man väljer. Små steglängder ger för det mesta ett bra resultat men stora beräkningstider. Steglängderna, både i höjd- och längdled, bör således väljas omsorgsfullt. Boken av Levy [2000] ger en del ledning vad det gäller detta. Ett användbart villkor i det här fallet är Nyquist-kriteriet. Låt oss anta att det finns strålar med den maximala elevationsvinkeln θ_{\max} , då skulle villkoret $\Delta z \leq \lambda/2 \sin \theta_{\max}$ för steglängden i höjddled gälla. För steglängden i x -riktningen skulle motsvarande villkor bli $\Delta x \leq \lambda/2(1 - \cos \theta_{\max})$. I praktiken är det svårt att uppfylla dessa villkor, varför man väljer de något snävare villkoren [Levy, 2000]

$$\Delta z \leq \frac{\lambda}{4 \sin \theta_{\max}} \quad (83)$$

för steglängden i höjddled och

$$\Delta x \leq \frac{\lambda}{4(1 - \cos \theta_{\max})}. \quad (84)$$

för steglängden i x -riktningen. Dessa villkor innebär att om den maximala vinkel tillåts vara 30° , då bör Δz vara mindre än eller lika med ungefär $1/2$ våglängd, dvs. $\lambda/2$, och Δx mindre än eller lika med ungefär 1.87λ .

Dipolkällan i avsnitt 4 medger att strålar med större elevationsvinklar än 45° kan finnas. För att inte få strålar med vinklar större än 45° har ett filter använts, dvs. elevationsvinklar större än 45° dämpas via ett pålagt exponentiellt avtagande filter. Det filter som har använts i simuleringarna är gaussiskt och kan skrivas som $\exp(-\alpha\theta^2)$, där $\exp(-\alpha\theta^2)$ är en konstant som bestämmer dämpningen av strålar med vinklar större än 45° . I simuleringarna för plan mark i avsnitt 7.1 gavs α ett sådant värde att dämpningen var ca. 3 dB vid $\pm 30^\circ$. Anledningen till att vi valt att inte dämpa källan hårdare, dvs. låta dämpningen vara 3 dB vid t.ex. $\pm 15^\circ$ istället, beror på att vi har velat ha en källa som inte skiljer sig alltför mycket från en verklig dipol. Detta för att vid jämförelsen med GRWA-VE [Gill, 1985] vara säker på att eventuella skillnader inte beror på en dålig beskrivning av källan. En hårdare dämpning av källan skulle annars, enligt villkoren i (83) och (84), innebära att betydligt större steglängder skulle kunna användas med bibehållen noggrannhet. För simuleringarna i avsnitt 7.2 dämpades dock källan betydligt mer, som förövrigt inte modellerades som en dipol här utan som en punktkälla. Här gavs α ett sådant värde att dämpningen var ca. 3 dB vid $\pm 7^\circ$, vilket helt enkelt berodde på att den verkliga källan hade en 3 dB:s lobbredd på ca. 14° .

6 Terräng

En verklig terräng kan normalt inte beskrivas som en jämn plan eller jämn sfärisk yta, utom för riktigt låga frekvenser, vilket i kuperad terräng skulle vara neråt ca. 1MHz. I VHF- och UHF-området kommer berg och i en viss mån även stora stenblock att ha en klar inverkan på vilken signalstyrka som erhålls vid mottagaren. För ännu högre frekvenser är denna inverkan, vilken till stor del är diffraktionseffekter, vanligtvis större. Vegetation är en annan sak som kan påverka vågutbredningen i en verklig terräng. Båda dessa effekter, dvs. topografins och vegetationens inverkan, kommer vi att gå in på i detta avsnitt.

6.1 Diffrakterande terränghinder

Hinder mellan en sändare och mottagare påverkar vågutbredningen på ett eller annat sätt och för små antennhöjder kommer den att vara stor. Diffraktion över icke genomskinliga hinder, dvs. inte vegetationshinder utan berg och/eller stora stenblock, kan vanligtvis tas om hand via någon kniveggmodell eller via geometrisk diffraktionsteori (GTD) [McNamara m.fl., 1990]. Här kommer vi dock att fokusera på en PE-modell för att ta hand om de icke genomskinliga hinder som höjdskillnaderna hos marken mellan terminalerna utgör. Modellen är den redan tidigare nämnda ”shift map” tekniken beskriven i en artikel av Donohue och Kuttler [2000].

6.1.1 Teori

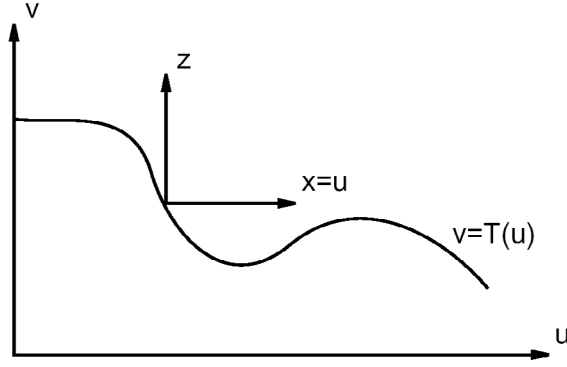
För att kunna ta hänsyn till markens höjdvariationer måste dessa på något sätt ingå i en PE-lösning, vilket kan göras genom att transformera höjdkoordinaten. I [Donohue och Kuttler, 2000] är det gjort för vida vinklar. Här ställs en mer allmän form av ekvation (23) upp, vilken kan skrivas som

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial \theta}{\partial x} - T' \left(\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - i \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + k^2 n^2} \right] u = 0, \quad (85)$$

där $T' = dT/dx$ är lutningen hos terrängen, $z = v - T(x)$, v är den otransformerade höjdkoordinaten och $T(x)$ är terrängens höjdprofil, se figur 3. Funktionen $u(x, z)$ är här relaterad till det otransformerade fältet $\psi(x, z)$ genom ekvationen

$$\psi(x, z) = e^{i\theta} u(x, z), \quad (86)$$

där $\theta(x, z) = kzT'(x) + f(x)$ och $f(x)$ är en godtycklig funktion med avseende på x .



Figur 3. Illustration av det otransformerade koordinatsystemet (u, v) och det transformerade (x, z) för en terrängprofil.

Fasen $\theta(x, z)$ kan för en styckvis linjär terrängprofil skrivas som

$$\theta(x, z) = k\alpha z + f(x), \quad (87)$$

där terrängens lutning $\alpha = T'(x)$ är konstant över varje enskilt segment. Olika segment har dock olika värden på lutningen. Om vi använder (87) erhålls

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + if' - \alpha \left(\frac{\partial}{\partial z} + ik\alpha \right) - ik\sqrt{1+Z+\zeta} \right] u = 0, \quad (88)$$

från (85), där operatoren Z är definierad i (25) och operatoren ζ kan skrivas som

$$\zeta = \frac{2i\alpha}{k} \frac{\partial}{\partial z} - \alpha^2. \quad (89)$$

Låt oss nu göra följande approximation av kvadratroten i (89):

$$\sqrt{1+Z+\zeta} \approx \sqrt{1+Z} \left(1 + \frac{\zeta}{2(1+Z)} \right) \approx \sqrt{1+Z} + \frac{1}{2} \zeta. \quad (90)$$

Denna approximation är inte helt olik den som används av Donohue och Kuttler [2000], dvs. en första ordningens utveckling av kvadratroten med avseende på operatoren ζ . Skillnaden är att de även har splittrat upp kvadratroten $\sqrt{1+Z}$, vilket vi inte kommer att göra. Vi ska senare istället använda padéapproximation för $\sqrt{1+Z}$, vilket leder till Claerbouts ekvation, se avsnitt 2.5. Anledningen är att vi tänker använda finita differensmetoden och inte fourier/split-step metoden för att lösa den resulterande PE-ekvationen. Låt oss således använda (90) i (88), vilket ger

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + ik \left(\frac{f'}{k} - \frac{\alpha^2}{2} - \sqrt{1+Z} \right) \right] u = 0. \quad (91)$$

Här bör man kunna se anledningen till varför approximationen i (90) görs. Den partiella derivatan $\partial/\partial z$ hos den andra och tredje termen i (88) skapar nämligen en del problem, men som i (91) har försvunnit. Skulle man använda padéapproximationen för $\sqrt{1+Z+\zeta}$

fås bland annat en tredjederivata med avseende på höjden, dvs \varkappa vilket inte är bra. Tyvärr är approximationen i (90) endast en första ordningens approximation med avseende på ζ och därmed terränglutningen $\alpha = T'(x)$, vilket vi ska återkomma till lite senare.

Ekvation (91) är inte helt olik (26). Genom ett lämpligt val av den godtyckliga funktionen $f(x)$ kan också (26) erhållas. Fördelen med detta är naturligtvis att man för kvadratroten $\sqrt{1+Z}$ kan använda padéapproximationen i (28) och erhålla Claerbouts ekvation i (30) för vilken differensschemat redan är känt, se avsnitt 3.3 och 3.4. Vi bör således välja $f(x)$ så att likheten

$$\frac{f'}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \equiv 1 \quad (92)$$

alltid är uppfylld, vilket ger lösningen

$$f(x) = kx + 0.5k\alpha^2 x \quad (93)$$

och därmed fasen

$$\theta(x, \varkappa) = k\alpha\varkappa + 0.5k\alpha^2 x + kx. \quad (94)$$

Man kan således ta hänsyn till höjdskillnader i terrängen genom att lösa Claerbouts ekvation och därefter modifiera fasen hos lösningen med hjälp av ekvation (86) och (94) för att få det verkliga fältet. Hur detta görs i differensschemat kommer vi till i nästa avsnitt.

Padéapproximationen av $\sqrt{1+Z}$, vilket ger Claerbouts ekvation, är av andra ordningen. För plan mark, dvs. då $\alpha \equiv 0$ och $\zeta \equiv 0$, skulle lösningen direkt ges av Claerbouts ekvation, om man bortser från faktorn e^{ikx} , vilken tillåter utbredningsvinklar upp till ungefär 45° [Levy, 2000]. Gränsen 45° är här förmodligen något optimistisk, varför gränsen 30° är mer rimlig.

Vad det gäller terrängen och dess lutning kan naturligtvis inte en lutning på 45° tillåtas. Eftersom approximationen i (90) innebär en första ordningens approximation med avseende på terränglutningen α fås en betydligt lägre gräns än 45° . Enligt [Donohue och Kuttler, 2000] kan i bästa fall en lutning på upp till 15° tillåtas.

6.1.2 Differensschema

Vi ska här helt kort beskriva hur lösningen marscheras fram i x -riktningen. Låt oss beteckna de horisontella och de vertikala grid punkterna med $x_0, x_1, \dots, x_m, \dots$ respektive $\varkappa_0, \varkappa_1, \dots, \varkappa_j, \dots$, de successiva terrängsegmentens lutning med $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots$, fältlösningen med $u_j^m = u(x_m, \varkappa_j)$ och/eller $\psi_j^m = \psi(x_m, \varkappa_j)$. Med dessa beteckningar, förutsatt att en startlösning ψ_j^0 existerar, kan lösningen marscheras fram i x -riktningen med följande sekvens av operationer:

1. Skifta vågfronten genom transformationen

$$u_j^{m-1} = \psi_j^{m-1} e^{-ik(\alpha_m \tilde{z}_j + 0.5\alpha_m^2 x_{m-1} + x_{m-1})}. \quad (95)$$

2. Lös differensschemat för Claerbouts ekvation, vilket ger u_j^m .
3. Gå tillbaka från lösningen u_j^m till ψ_j^m genom transformationen

$$\psi_j^m = u_j^m e^{ik(\alpha_m \tilde{z}_j + 0.5\alpha_m^2 x_m + x_m)}. \quad (96)$$

4. Upprepa förfarandet med början av punkt 1 genom att skifta vågfronten för den nyli-
gen funna lösningen ψ_j^m , osv.

Denna procedur kan skrivas om och beräknas på ett något mer numeriskt effektivt sätt. Följande sekvens av operationer ger samma lösning ψ_j^m som ovan:

1. Skifta vågfronten genom transformationen

$$u_j^{m-1} = \psi_j^{m-1} e^{-ik\alpha_m \tilde{z}_j}. \quad (97)$$

2. Lös diferensschemat för Claerbouts ekvation, vilket ger u_j^m .
3. Gå tillbaka från lösningen u_j^m till ψ_j^m genom transformationen

$$\psi_j^m = u_j^m e^{ik(\alpha_m \tilde{z}_j + 0.5\alpha_m^2 \Delta x + \Delta x)}, \quad (98)$$

där Δx är avståndssteget.

4. Upprepa förfarandet med början av punkt 1 genom att skifta vågfronten för den nyd-
ligen funna lösningen ψ_j^m , osv.

6.2 Vegetation

Semi-transparenta hinder i form av vegetation såsom skog är svåra att ta hänsyn till på grund av att dessa hinder tillåter transmission igenom och diffraktion runt eller över dem. En del försök att inkludera transparenta diffrakterande hinder i GTD-teorin har gjorts [Burnside och Burgener, 1983], [Rouviere m.fl., 1997], [Rouviere m.fl., 1999]. Eftersom GTD är en strålbaserad teori innebär dock detta att man även måste söka efter strålar som har transmitterats igenom hindren, vilket naturligtvis ökar på problemets komplexitet. Det är med andra ord inte praktiskt att använda GTD och transparenta kilar för att lösa vågutbredningsproblem över terräng, åtminstone inte då det är fråga om utbredningssträckor på ett par kilometer.

En modell som är speciellt utformad för vågutbredning i skog är Tamirs modell [Tamir, 1967], [Dence och Tamir, 1969]. Skogen approximeras här med en dielektrisk skiva ovan plan mark. Tyvärr fungerar denna modell bara då båda terminalerna befinner sig inuti skogen. Ett försök till att förbättra teorin har dock gjorts [Tamir, 1977], men resultatet är inte alltid tillförlitligt. Teorin kan nämligen ge upphov till diskontinuiteter.

En intressant omständighet vad det gäller Tamirs modell är att värdena på det effektiva (komplexa) brytningsindexet som skogen tilldelas är nära ett, åtminstone för skog av nordisk typ. Om man kan anta att brytningsindexet är nära ett bör det nämligen vara möjligt att använda PE-teknik. Skogen skulle då modelleras via brytningsindexet i ekvation (42), vilket inte är någon svårighet att implementera. Ett område med skog får helt enkelt ett brytningsindex skilt från vanlig atmosfär. Svårigheten är att ge ett skogsområde ett relevant värde vad det gäller brytningsindex. Ett bra värde, som också är nära ett, bör dock ge ett bra resultat.

7 Numeriska exempel

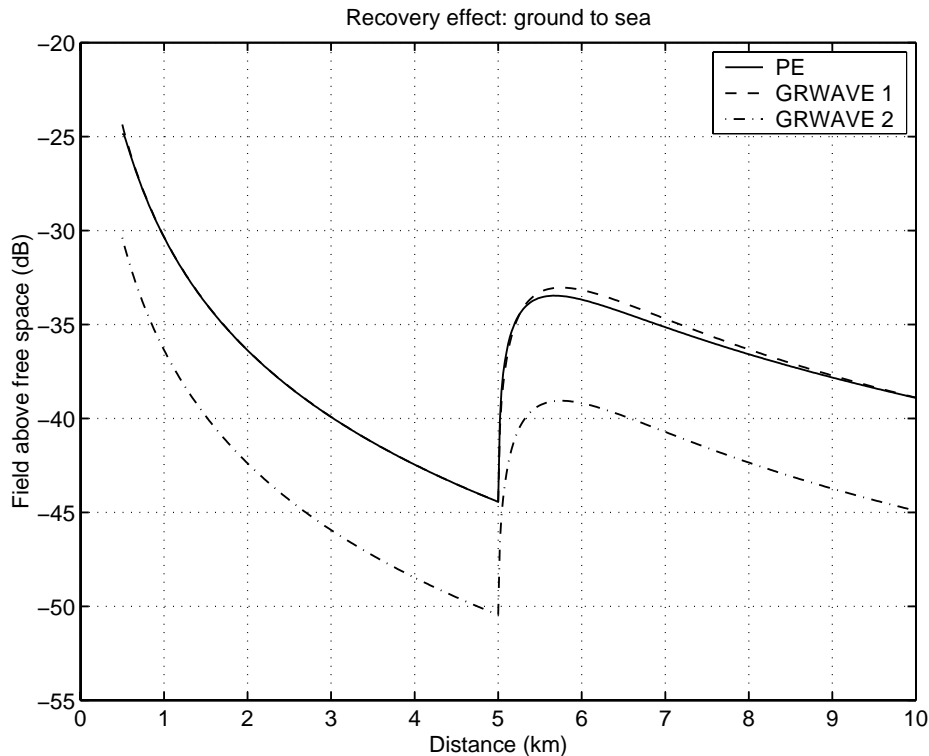
Att lösa en parabolisk ekvation med finita differensmetoden kan vara beräkningsintensivt. I simuleringsexemplena i detta avsnitt, där vi räknar med att strålar med elevationsvinklar i närheten av 30° kan finnas, har vi i höjddled använt en steglängd något mindre än en våglängd och i längdled en steglängd något större än en våglängd. För frekvenserna 50 till 200 MHz, med ett par meters våglängd, blir det ett tusental steg i x -riktningen. Beräkningstiderna var dock acceptabla, ca. en minut per beräkning. För frekvenserna över 1 GHz, med våglängder mindre än ca. 0.3 m, blir dock beräkningstiderna flera minuter.

7.1 Resultat för plan mark

Det första exemplet i detta avsnitt har valts för att se om den implementerade finita differensmetoden ger rimliga resultat. I figur 4 kan man jämföra resultat för PE-metoden och det välkända markvågsprogrammet GRWAVE [Gill, 1985]. Vi har här vidare låtit markens konduktivitet ändras vid avståndet 5 km från 10^{-3} till 0.6 S/m, vilket ska motsvara en övergång från vanlig mark till hav (Östersjön). Det man då förväntar sig att se är en så kallad återhämtningsseffekt vid övergången från mark till hav.

Den metod som har använts i GRWAVE-fallet för att ta hand om ändringen av markens konduktivitet är Millingtons metod [Millington, 1949]. Detta eftersom GRWAVE förutsätter att markens konduktivitet är oförändrad längs med utbredningssträckan. Millingtons metod är för övrigt välkänd. Metoden är något "ad hoc" [Stocke, 1975] men har ett visst stöd i teorin [Millington, 1949] och har även visat sig ge bra överensstämmelse med experiment. I PE-fallet är det inte så mycket att tänka på. Det är bara att låta η^m och η^{m+1} i ekvation (68) respektive (69), eller i ekvation (52) respektive (53), ändra värde vid övergången från mark till hav för att ändringen i konduktiviteten ska komma med i lösningen. Anmärkning: Begynnelsevärdsnittet i PE-modellen har beräknats vid 500 meter medelst markvågsmodellen i avsnitt 4, dvs. ekvation (72) för vertikal polarisation.

Om vi nu ser till resultaten i figur 4 fås en klar återhämtningsseffekt både för PE-metoden, den heldragna linjen, och GRWAVE med Millingtons metod, den streckade linjen. En liten skillnad mellan de två metoderna kan ses strax efter övergången till hav, en skillnad som dock tycks försvinna efter ett par kilometer. Figur 3 är således en bekräftelse på att den implementerade PE-modellen ger ett riktigt resultat. Anmärkning: för att kompensera för att jorden är sfärisk har det modifierade brytningsindexet i (13) använts. Exemplet i figur 3 är också det enda exemplet där vi använt (13).

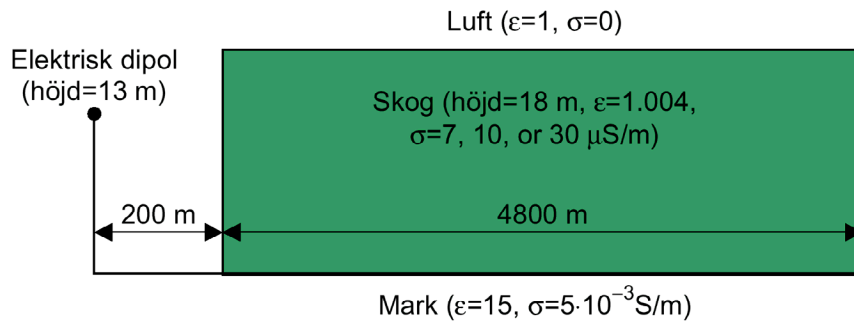


Figur 4. PE-metoden (heldragen kurva) och GRWAVE med Millingtons metod (streckad kurva) för frekvensen 50 MHz och vertikal polarisation. Den streckprickade kurvan är för GRWAVE där en strålningsresistans för oändligt ledande mark ingår. Sändar- och mottagarhöjden är 0 m. För sträckan 0-5 km är $\epsilon_r=15$ och $\sigma=10^{-3}$ S/m, och för 5-10 km 70 respektive 0.6 S/m.

Den streckprickade kurvan i figur 4 är resultatet för GRWAVE då en strålningsresistans för oändligt ledande mark har använts [Gill, 1985]. Normalt ingår denna i programpaketet GRWAVE, men som vi tagit bort när vi beräknade den streckade kurvan. För låga frekvenser och antennhöjder har denna en betydelse och skulle kunna ha använts även i PE-fallet, men som vi valt att ta bort. Om det är rätt eller fel kan diskuteras. Det viktiga här är dock att PE-modellen och GRWAVE ger ett överensstämmande resultat.

Nästa och kommande exempel går in på vad som egentligen är målet med denna rapport, vilket är att se om det är möjligt att använda PE vid vågutbredningsberäkningar där vegetation, i första hand skog, ingår. Alla beräkningsexempel kommer vidare bara att behandla ett vågutbredningsfall, vilket är illustrerat i figur 5. Det enda som kommer att ändras är frekvensen, polarisationen och konduktiviteteten för skogen.

Det första beräkningsexemplet där skog modelleras som en dielektrisk skiva ser vi i figur 6. Här beräknas transmissionsförlusten som funktion av frekvensen då mottagaren befinner sig 5 km bort från sändaren och på höjden 13 m. Begynnelsevärnsnittet till PE-modellen beräknas strax innan 200 m där skogen börjar. Orsaken till valet av just detta exempel är att vi kan jämföra med vad den ganska välkända skogsmodellen av Tamir [Tamir, 1967] ger för ett liknande fall, se även [Dence och Tamir, 1969].

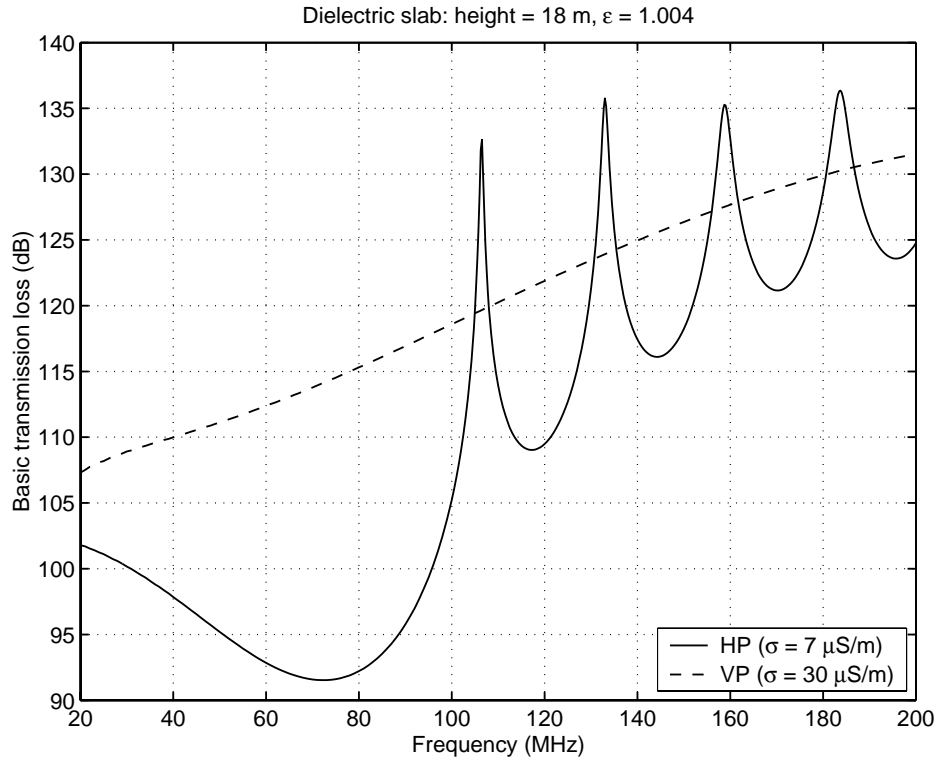


Figur 5. Skog modellerad som en homogen dielektrisk skiva. De dielektriska egenskaperna har antagits vara: $\epsilon=1.004$ och $\sigma=7, 10$ eller $30 \mu\text{S/m}$.

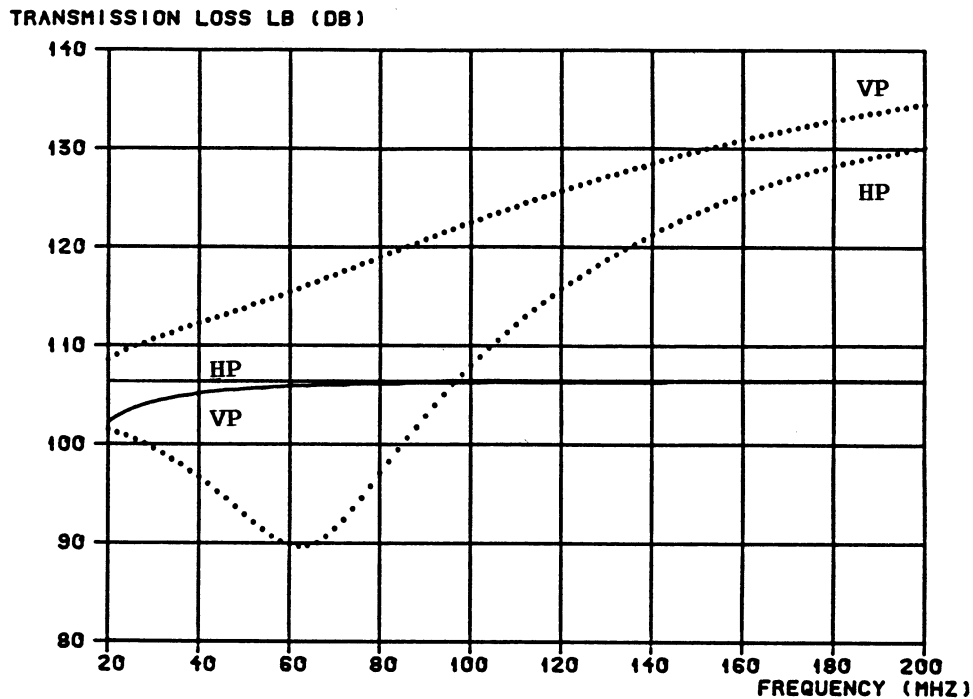
Figur 7, som är tagen från [Asp, 1986], visar resultatet för Tamirs modell med skog längs hela utbredningsvägen, dvs. även sändaren är inne i skogen. De två exemplen skiljer sig således något åt, vilket innebär att en viss skillnad i resultaten är att vänta. Anledningen till att vi inte har placerat sändaren inne i skogen är att vi inte utan svårigheter kan beräkna ett begynnelsevärnsnitt till PE-modellen i detta fall. Det finns helt enkelt inte någon bra analytisk modell för en dipol placerad inne i en dielektrisk skiva, där hänsyn tas till gränssytan dielektrikum-luft. Det som krånglar till lösningen är att det kan existera en ytvåg i denna gränssyta, som man inte kan bortse ifrån. Anm.: de heldragna kurvorna i figur 7 har erhållits via en jämn sfärisk jordmodell och är inte intressanta i vår jämförelse.

Om man nu jämför resultaten i figur 6 och 7 kan man se en polarisationsberoende effekt för båda modellerna. Horisontell polarisation (HP) ger en klart lägre transmissionsförlust för frekvenser under 100 MHz än vad vertikal polarisation (VP) gör. Denna effekt är önskad eftersom många experiment visar på en lägre transmissionsförlust för horisontell polarisation [Asp, 1986]. För de lägre frekvenserna ger jämförelserna stöd för att PE-metoden kan användas för skog modellerad som en dielektrisk skiva. För lite högre frekvenser (i detta fall mellan 100 och 200 MHz) fås någon form av interferens mellan två vågkomponenter som inte direkt var väntad med tanke på att Tamirs modell inte uppvisar någon sådan alls. Det första man frågar sig är naturligtvis om detta är korrekt. Tyvärr finns inga experiment som kan ge ett bra svar på om uppförandet är riktigt. Anmärkning: de värden som valts för konduktiviteten i de två polarisationsfallen är desamma som i [Asp, 1986]. Att de två värdena vidare är olika speglar helt enkelt att trädstammarna är orienterade i en viss riktning, vilket naturligtvis gör att de två polarisationsriktningarna bör ha olika värden vad det gäller konduktiviteten.

I [Asp, 1986, figur 4] visas mätningar av transmissionsförlusten över en utbredningssträcka liknande den i figur 5 och här kan man inte se någon interferens. Å andra sidan finns bara en mätpunkt mellan frekvenserna 100 och 200 MHz, vilket naturligtvis är helt otillräckligt för att man ska kunna säga om det finns några interferenser eller ej. Tamirs modell bygger dessutom på den så kallade lateralvågslösningen till utbredningsproblemet med antennerna placerade i en dielektrisk skiva med förluster. Lateralvågen utbreder sig i luften längs gränssytan mot skogen och dämpas därför relativt lite i jämförelse med de



Figur 6. PE-metoden för en skog modellerad som en homogen dielektrisk skiva. Skogshöjden är 18 m och antennhöjderna är 13 m. Utbredningssträckans totala längd är 5 km.



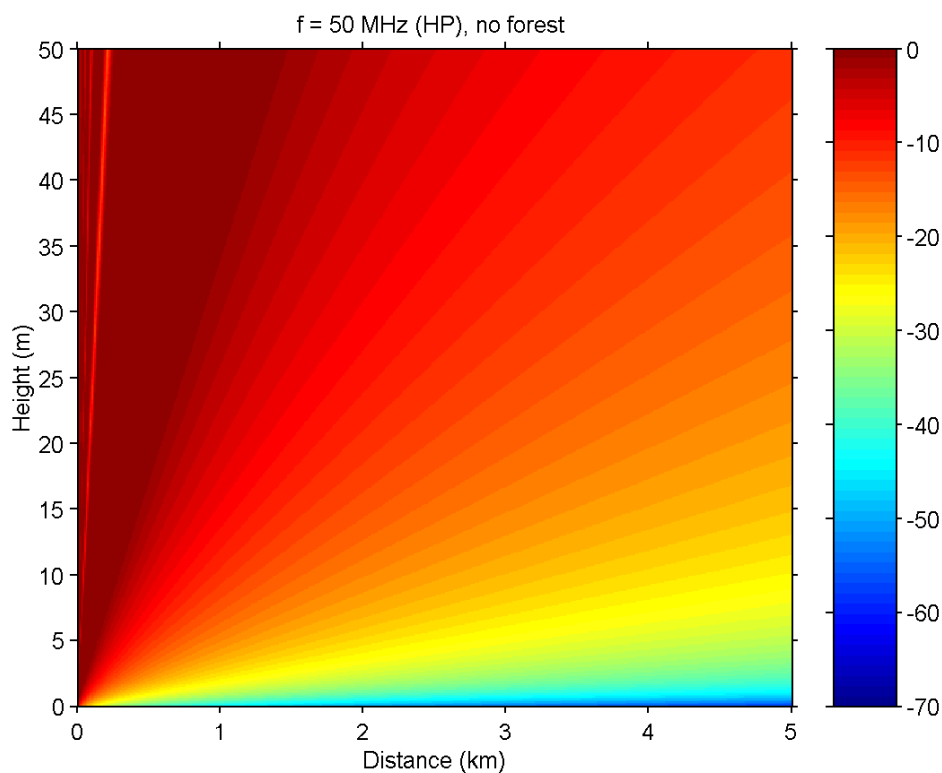
Figur 7. Tamirs lateralsvågmodell (de punktade kurvorna) för samma exempel som i figur 5 men med skog längs hela utbredningsvägen. De heldragna kurvorna är resultaten för jämn sfärisk jord. Bilden är tagen från [Asp, 1986].

komponenter som utbreder sig inuti skogen. Modellen bygger således på att alla strålar som utbreder sig helt inuti skogsmediet dämpas ut och fungerar därför inte för korta avstånd, framför allt inte för en skog med låga förluster, där även de direkta komponenterna genom skogen kan ge betydande bidrag. En orsak till interferenserna skulle nämligen kunna vara interferens mellan den så kallade lateralvågen och de direkta komponenterna.

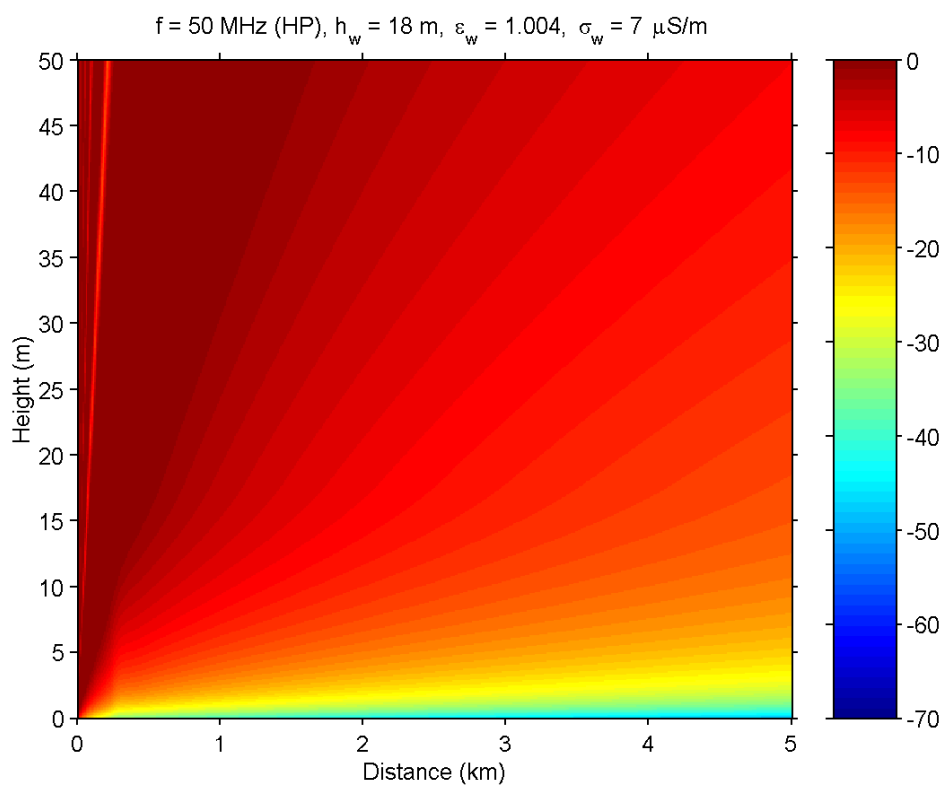
I figur 6 har vi använt ett konstant värde på konduktiviteten, dvs. oberoende av frekvensen. Detta antagande är säkerligen inte korrekt, eftersom en del experiment pekar på att konduktiviteten skall öka med frekvensen. Om värdet på konduktiviteten skulle öka med frekvensen fås nämligen en högre dämpning inne i skogen för de högre frekvenserna än vad som skulle ha erhållits för ett konstant värde. Resultatet blir att de vågor som fortplantar sig inne i skogen dämpas mer, vilket därmed skulle minska eventuella interferenser. Det är också precis vad som händer om man provar att öka konduktiviteten i PE-modellen. Figur 8-55 visar PE-resultat för dämpningen relativt frirymdämpningen i dB i form av tvådimensionella färgplottar och som funktion av avståndet för två olika höjder (2 och 13 m). Här kan man se vad som händer för olika frekvenser och värden på konduktiviteten. Vågutbredningssituationen är illustrerad i figur 5.

Som jämförelse har vidare också en beräkning för varje frekvens och polarisation gjorts utan skog. Det man bland annat kan se för de två lägsta frekvenserna i figurerna 8-31 är att skog beskriven som en dielektrisk skiva faktiskt ger mindre dämpning nära marken för den lägsta konduktiviteten ($7 \mu\text{S/m}$) än i fallet ingen skog. För det största värdet på konduktiviteten ($30 \mu\text{S/m}$) är resultatet det motsatta, dvs. ingen skog ger en mindre dämpning nära marken. Att dämpningen i den dielektriska skivan ökar med ökande konduktivitet är väntat. Med andra ord måste en skog beskriven som en dielektrisk skiva ha låg konduktivitet för att man ska kunna erhålla en bättre signalstyrka än i fallet ingen skog. Vidare kan man se att för en given konduktivitet har polarisationen en ganska liten betydelse. För de lägre frekvenserna och låga höjder finns dock en skillnad mellan HP och VP, en skillnad som redan finns för utbredning över mark utan skog. Den skillnad som man har observerat via mätningar tillskriver man konduktiviteten [Asp, 1986]. Stammarna i en skog är t. ex. parallella med vertikal polarisation och vinkelräta mot horisontell, vilket skulle vara en anledning att använda en lägre konduktivitet för horisontell polarisation än för vertikal. Markens elektriska egenskaper har också ganska liten betydelse. Detta är inte helt oväntat, eftersom vågutbredning längs med marken innebär små bestrykningsvinklarna vid reflektion. För stora bestrykningsvinklar kommer det att vara en skillnad, men detta innebär också för det mesta att man har stora elevationsvinklar, och för stora elevationsvinklar är PE-metoden inte tillförlitlig.

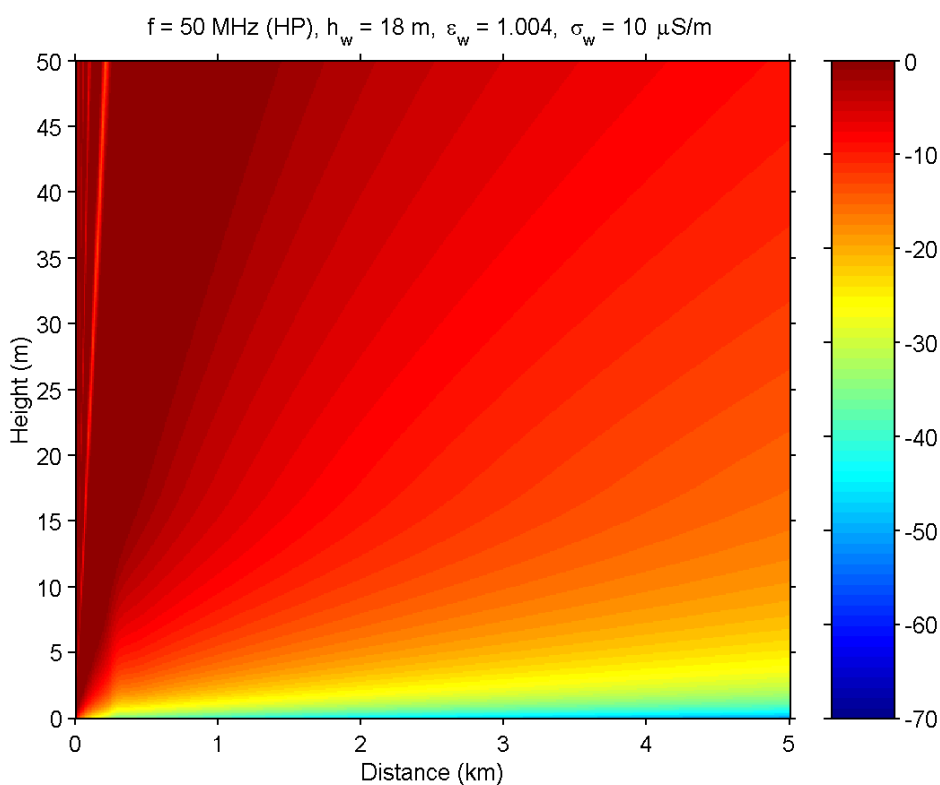
Resultaten för de två högsta frekvenserna i figurerna 32-55 är något mer intressanta. Figurerna bekräftar den interferens som erhöles för det lägre värdet på konduktiviteten i figur 6. En förklaring till denna interferens skulle kunna vara att lateralvågen som utbreder sig längs med gränsytan skog-luft interfererar med de direkta komponenterna som utbreder sig helt inuti skogsskivan. För det största värdet på konduktiviteten har vi inte detta interferensmönster, vilket då förklaras med att de direkta komponenterna dämpas ut för snabbt för att kunna interferera med lateralvågen.



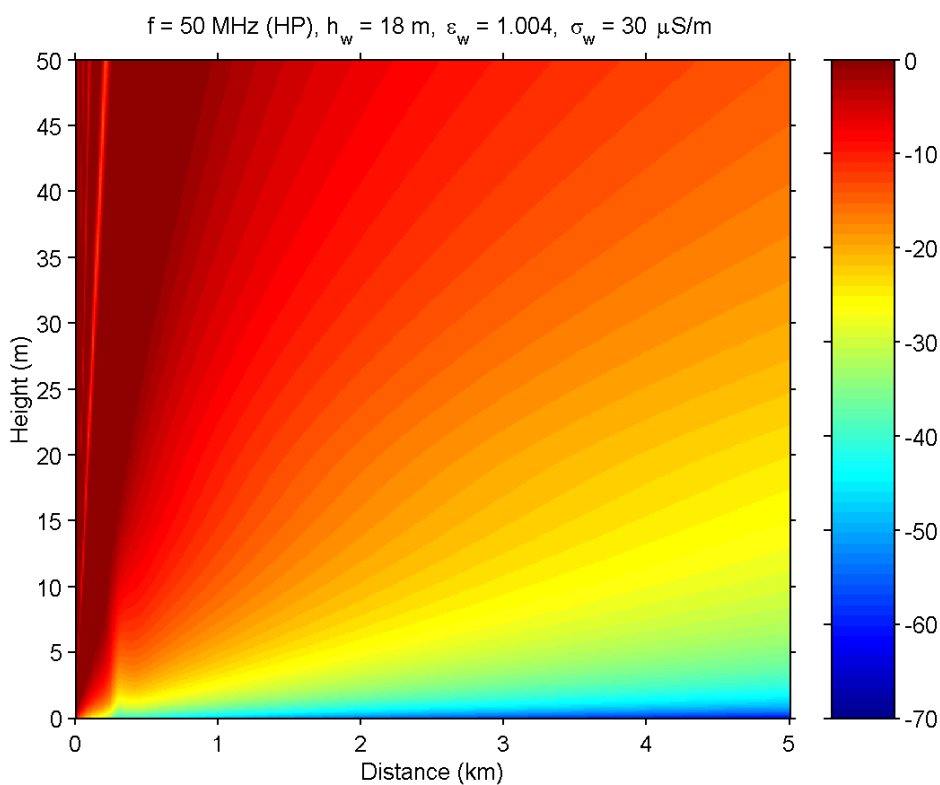
Figur 8. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 50 MHz, horisontell polarisation och normalatmosfär utan skog.



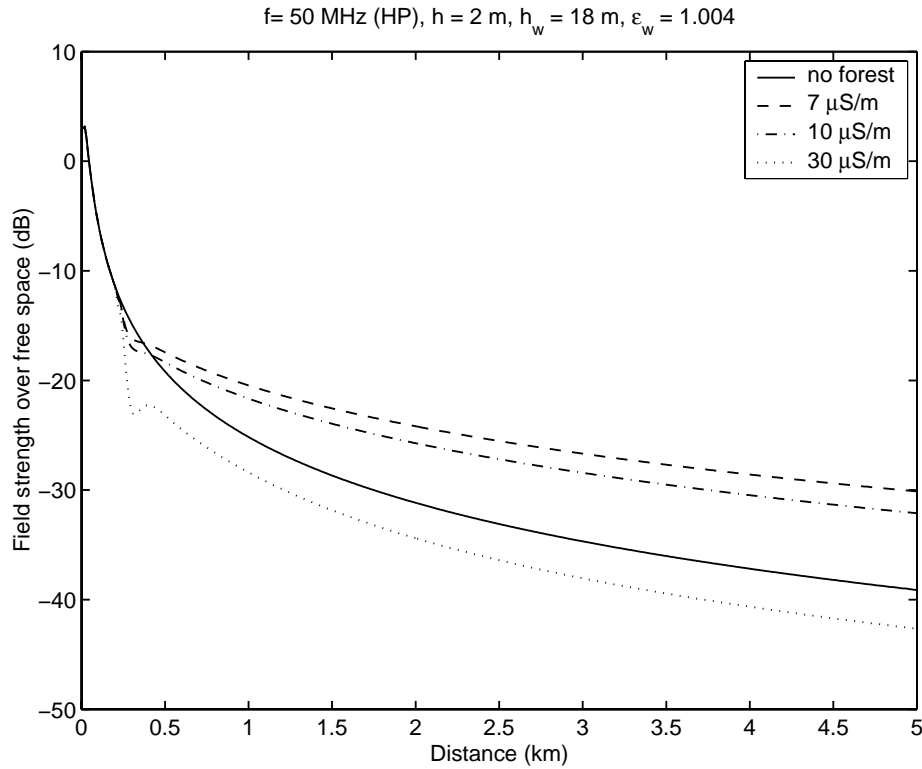
Figur 9. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 50 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma = 7$ $\mu\text{S/m}$.



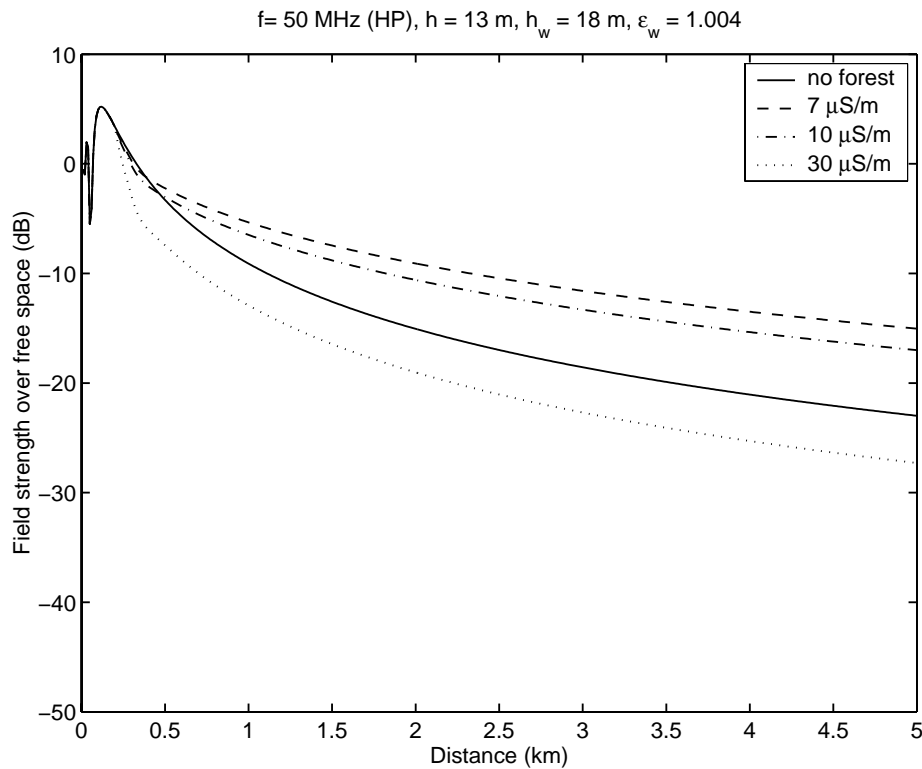
Figur 10. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 50 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=10 \text{ } \mu\text{S/m}$.



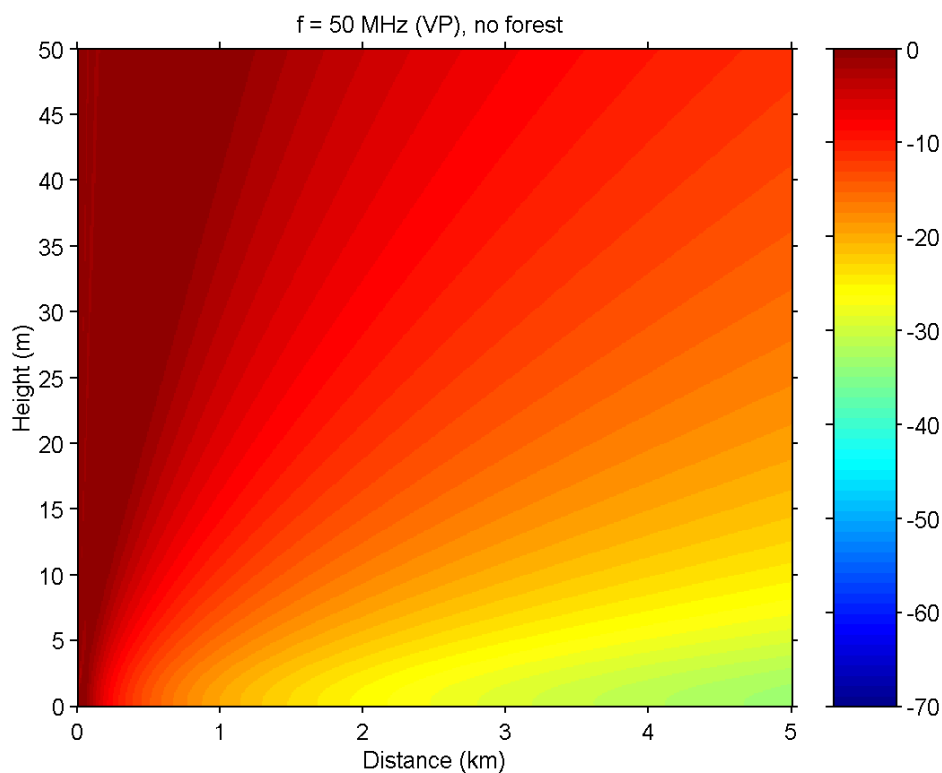
Figur 11. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 50 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=30 \text{ } \mu\text{S/m}$.



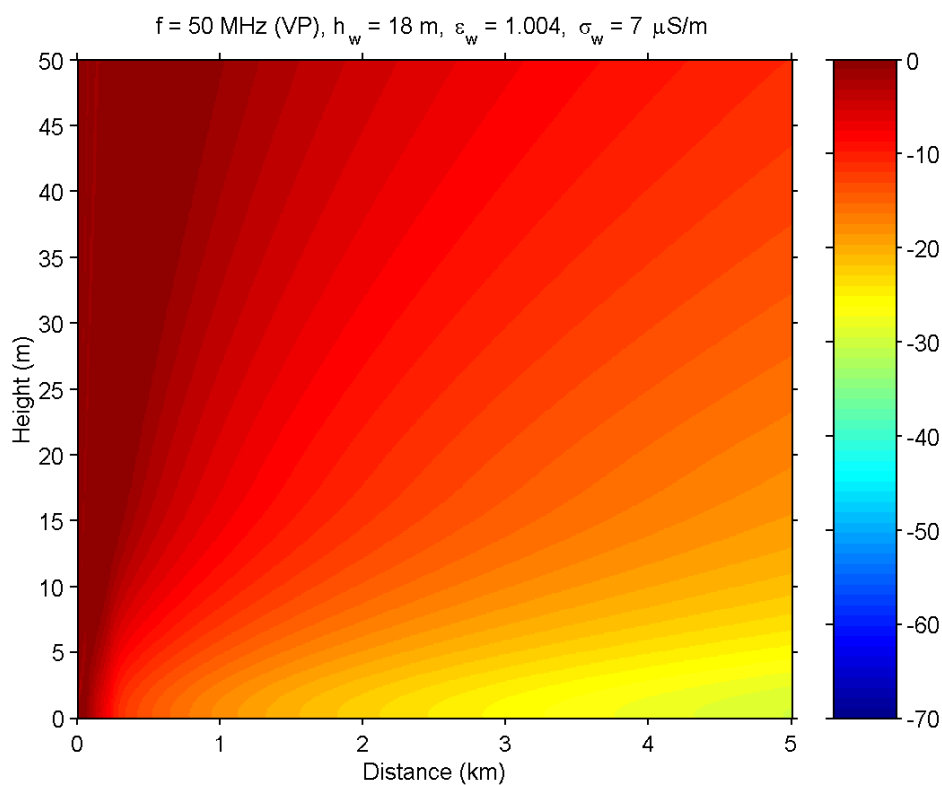
Figur 12. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 2 m, frekvensen 50 MHz och horisontell polarisation.



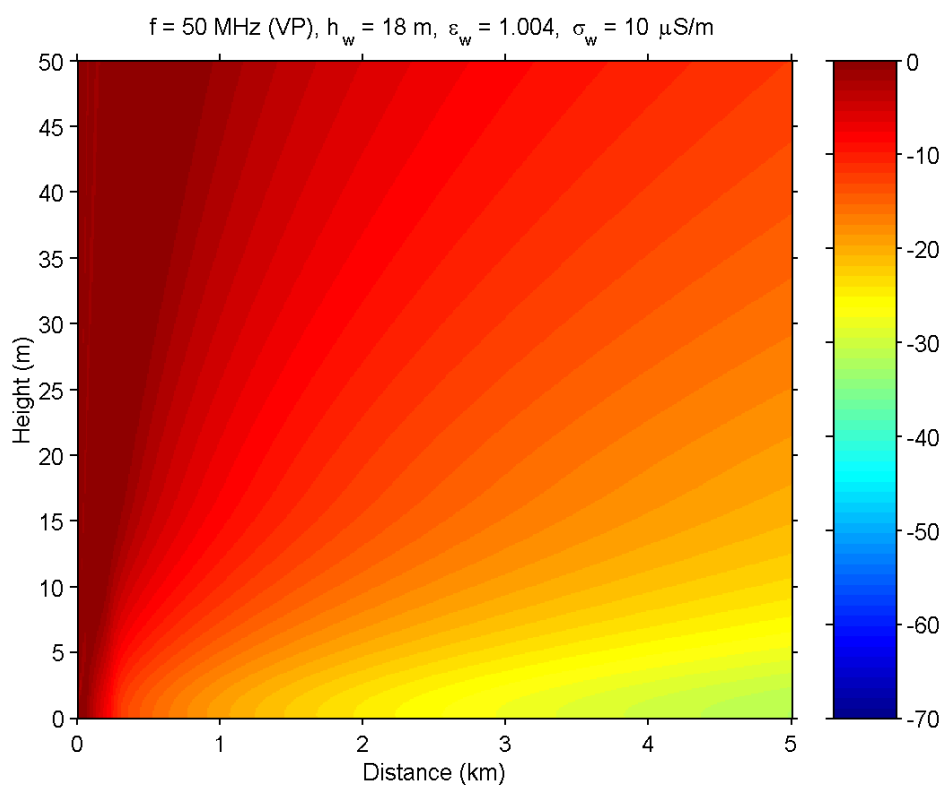
Figur 13. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 13 m, frekvensen 50 MHz och horisontell polarisation.



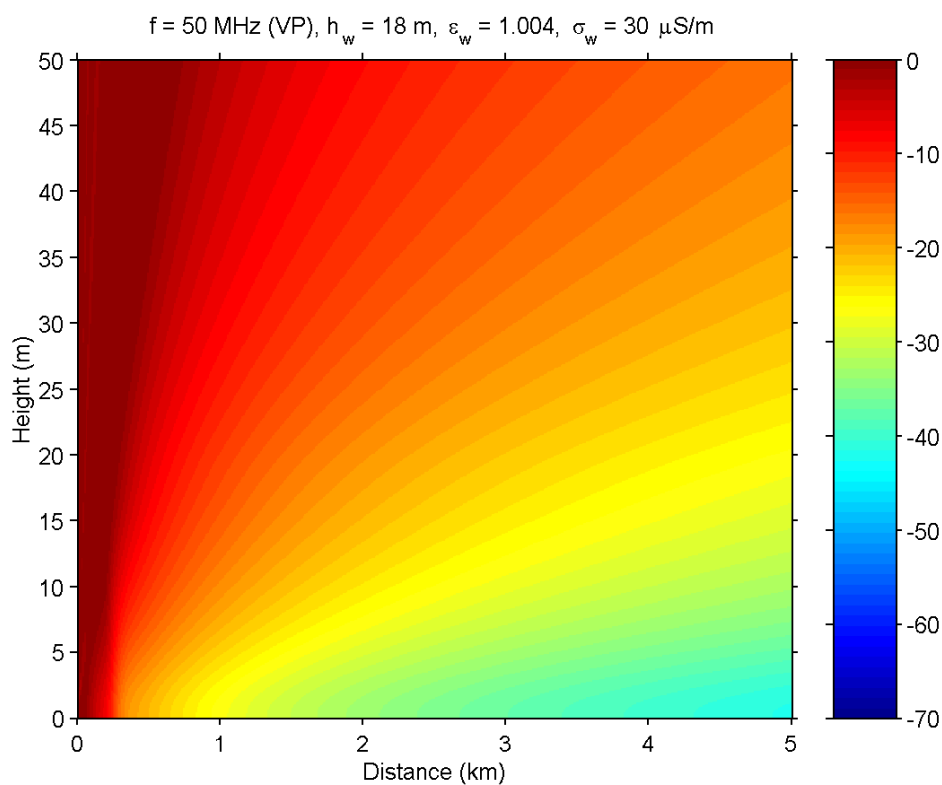
Figur 14. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 50 MHz, vertikal polarisation och normalatmosfär utan skog.



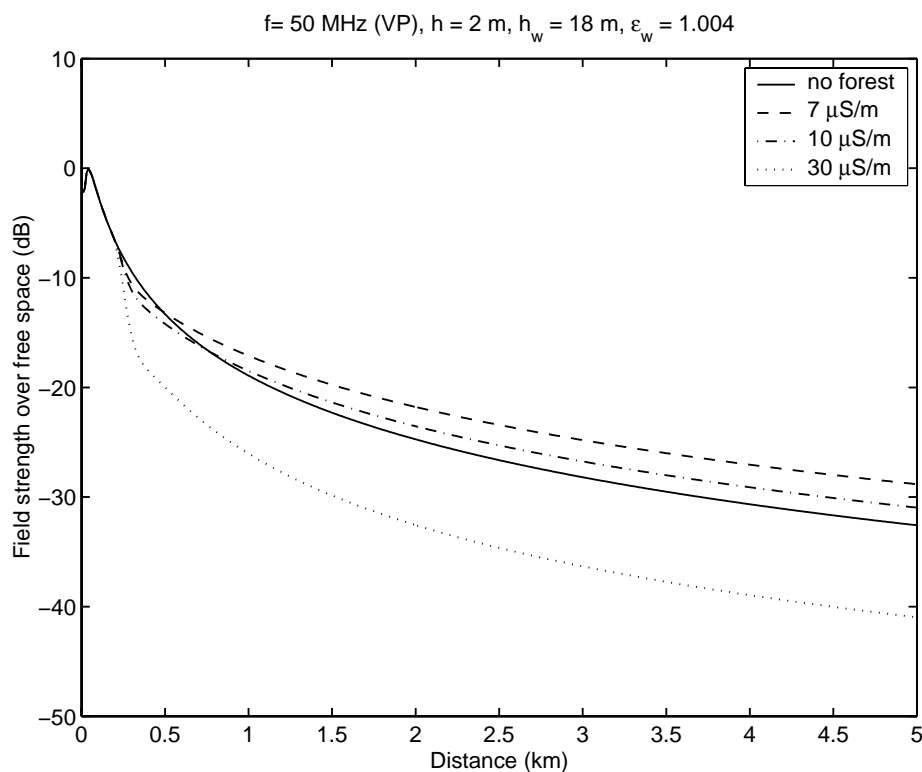
Figur 15. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 50 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=7$ μ S/m.



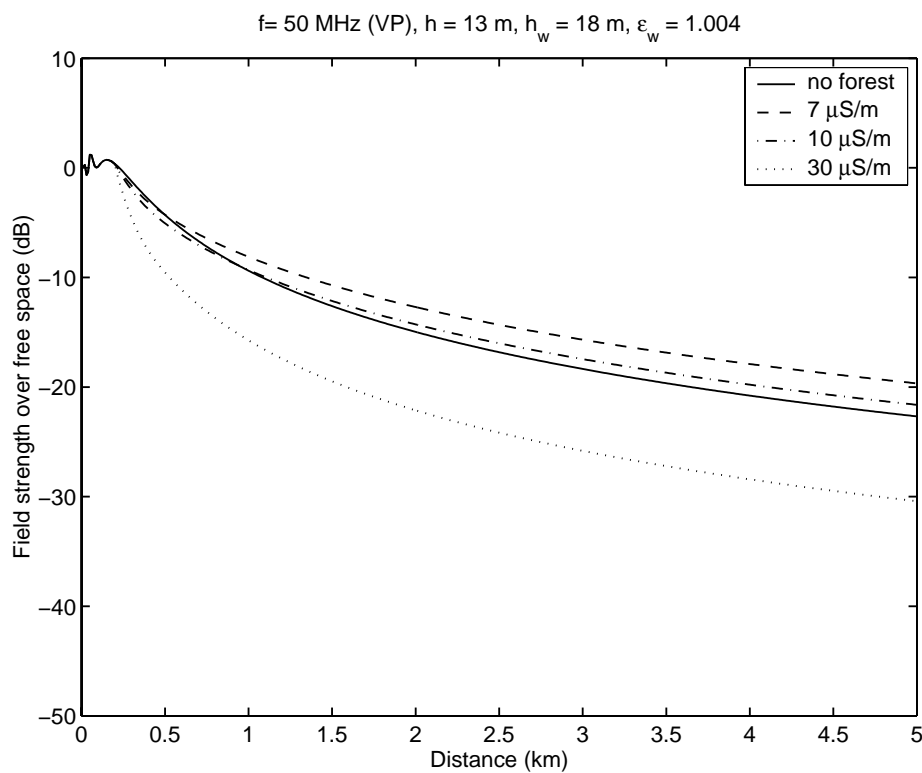
Figur 16. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 50 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=10 \text{ } \mu\text{S/m}$.



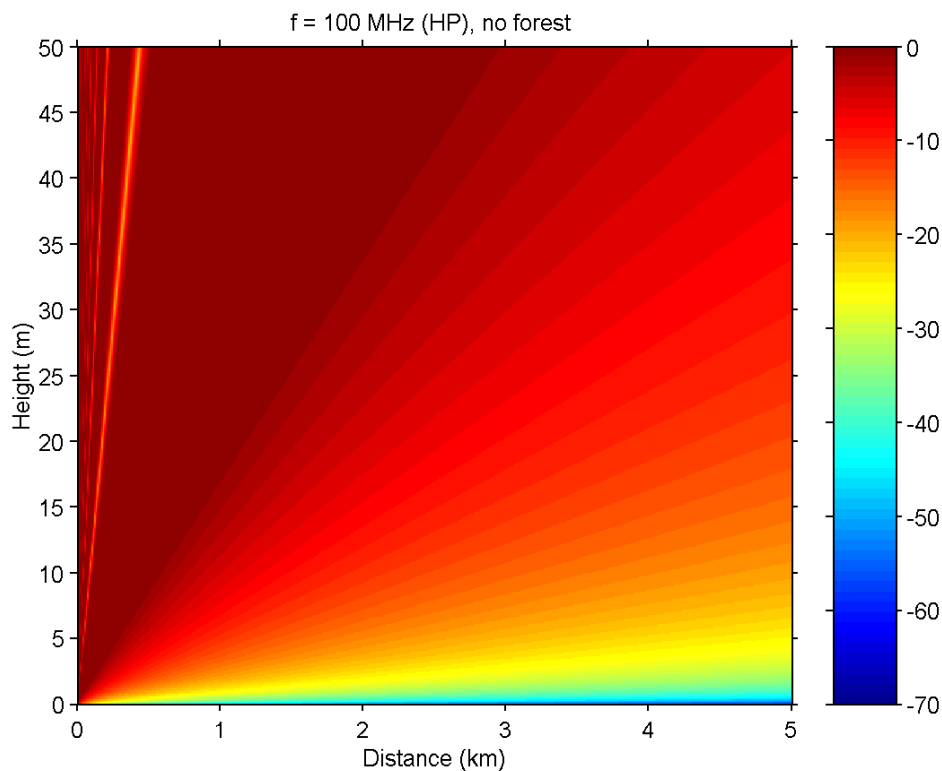
Figur 17. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 50 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=30 \text{ } \mu\text{S/m}$.



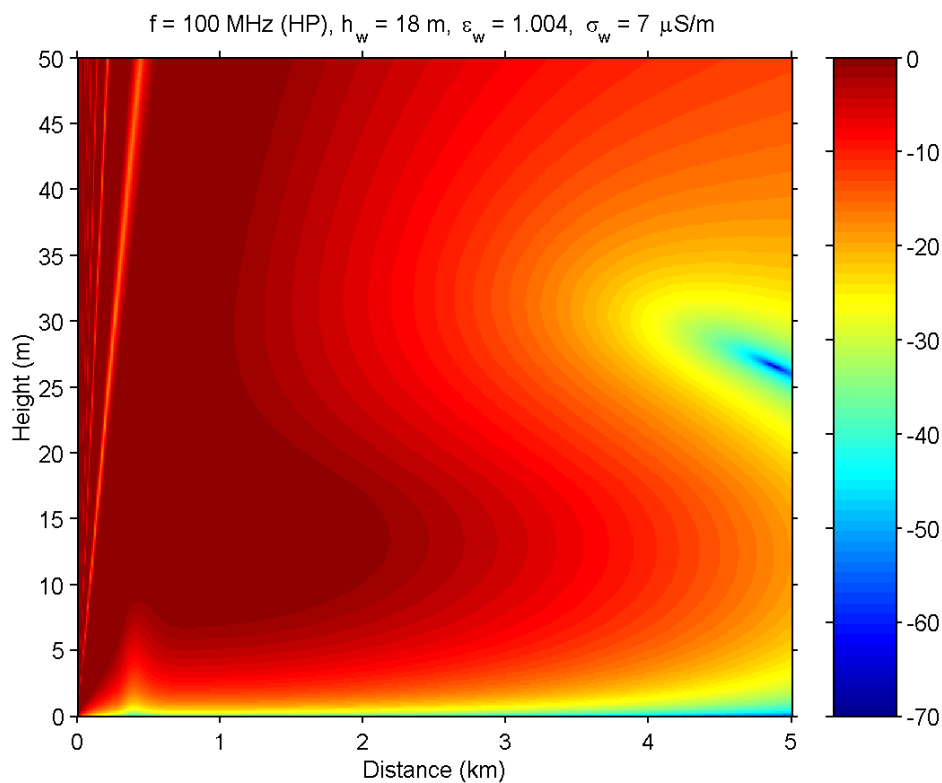
Figur 18. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 2 m, frekvensen 50 MHz och vertikal polarisation.



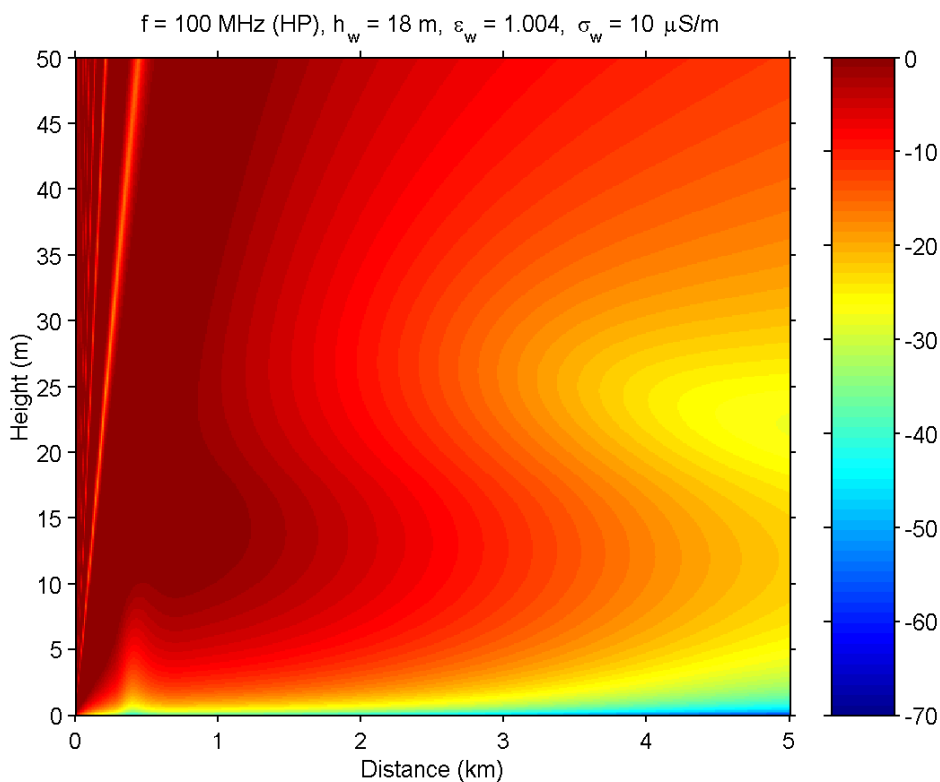
Figur 19. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 13 m, frekvensen 50 MHz och vertikal polarisation.



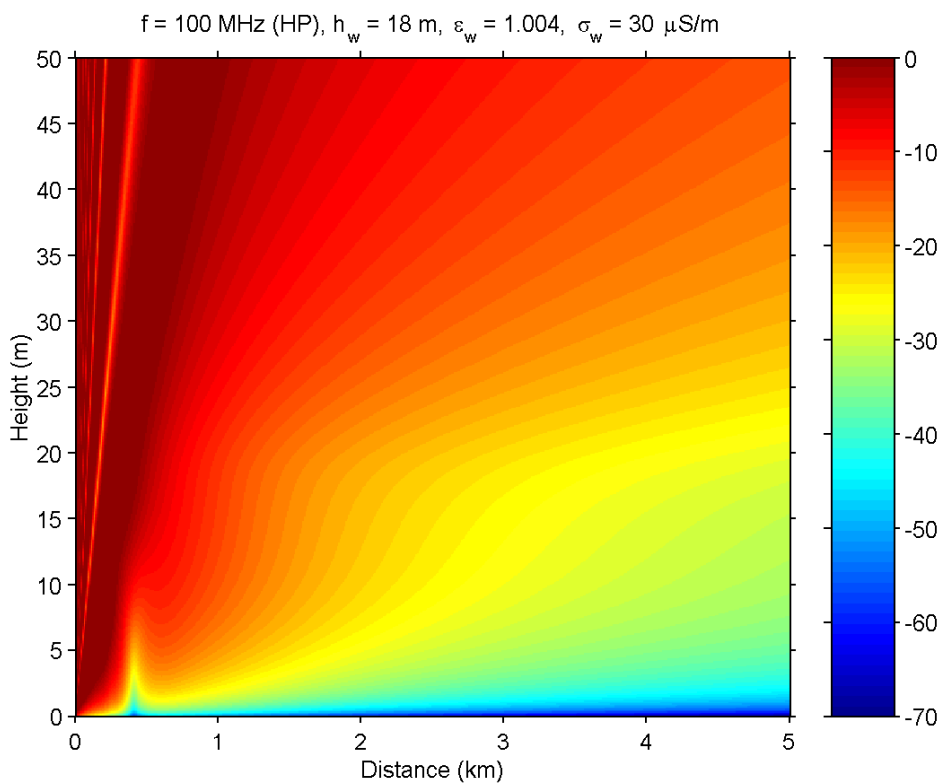
Figur 20. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 100 MHz, horisontell polarisation och normalatmosfär utan skog.



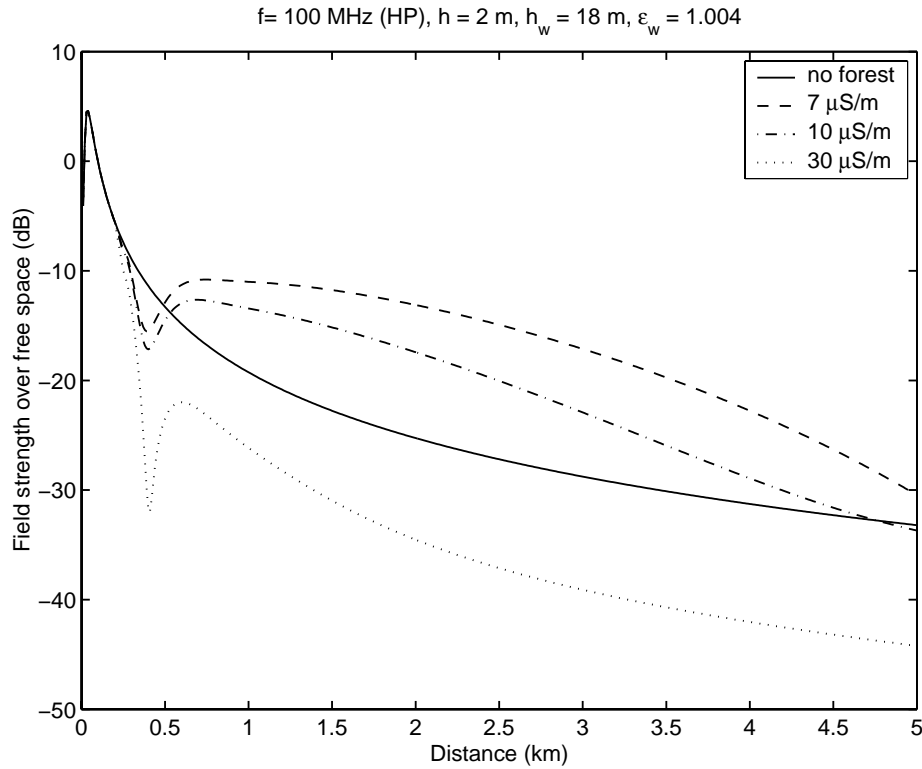
Figur 21. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 100 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=7$ μ S/m.



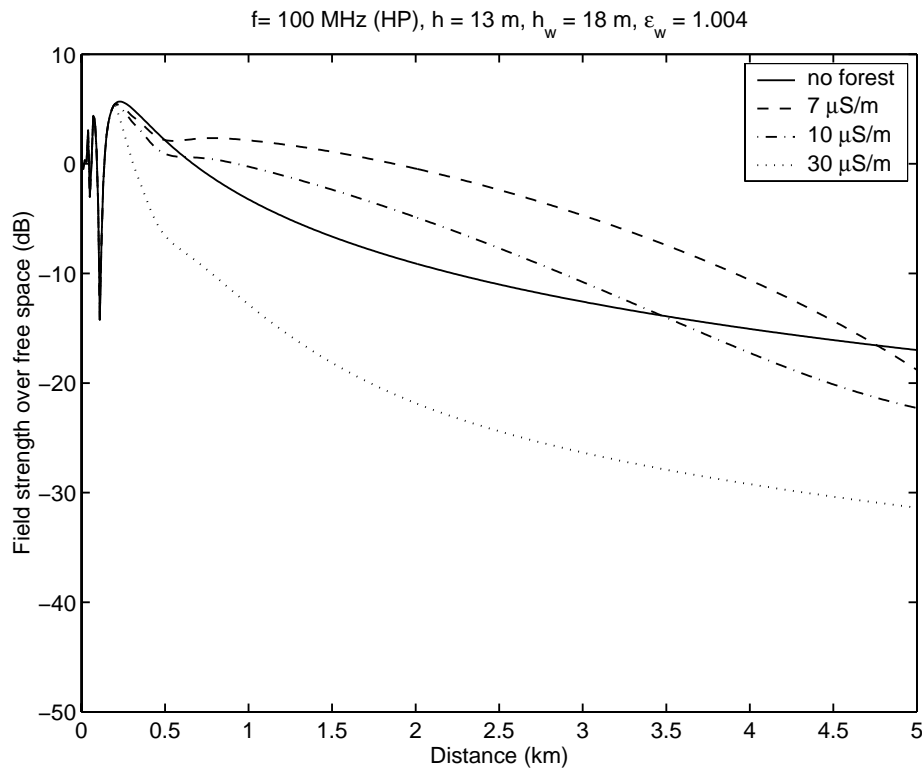
Figur 22. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 100 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=10 \text{ } \mu\text{S/m}$.



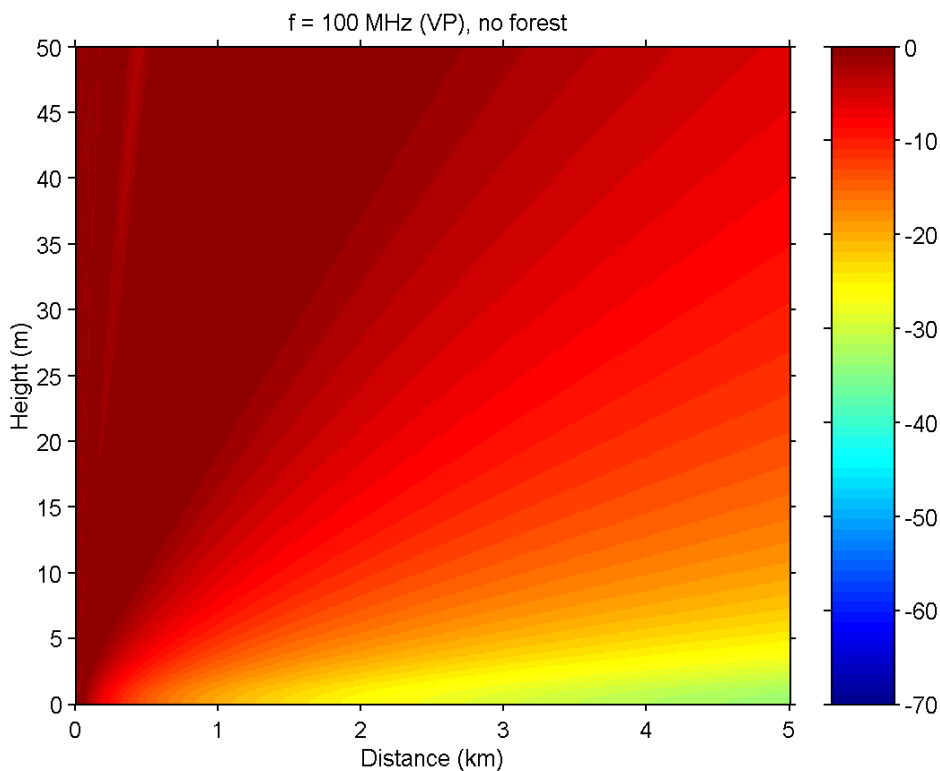
Figur 23. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 100 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=30 \text{ } \mu\text{S/m}$.



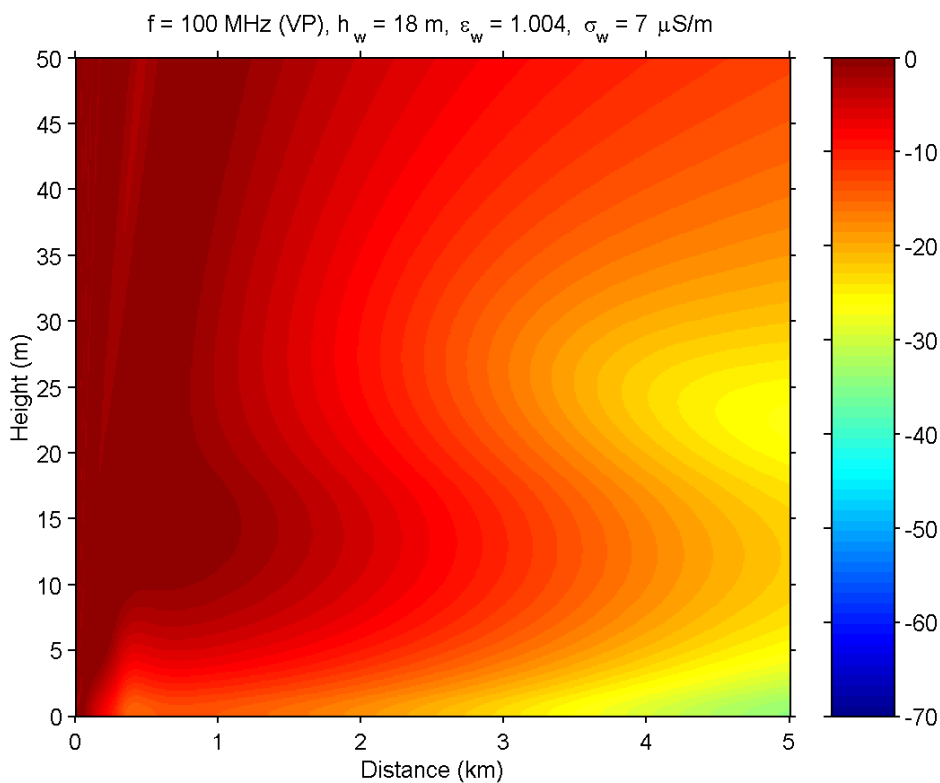
Figur 24. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 2 m, frekvensen 100 MHz och horisontell polarisation.



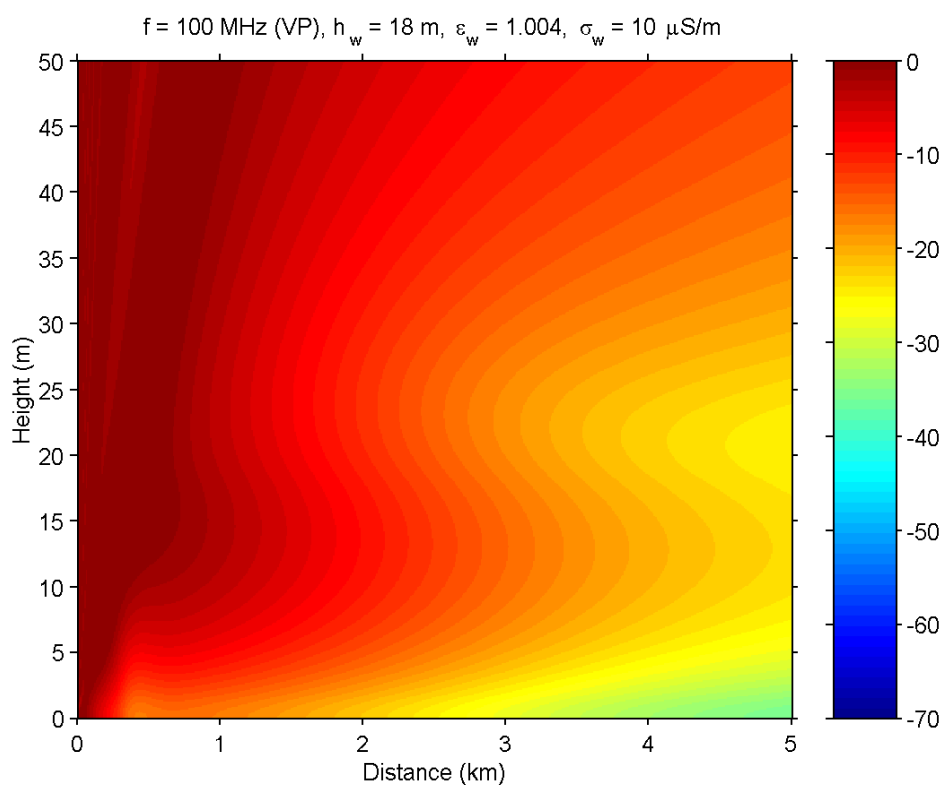
Figur 25. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 13 m, frekvensen 100 MHz och horisontell polarisation.



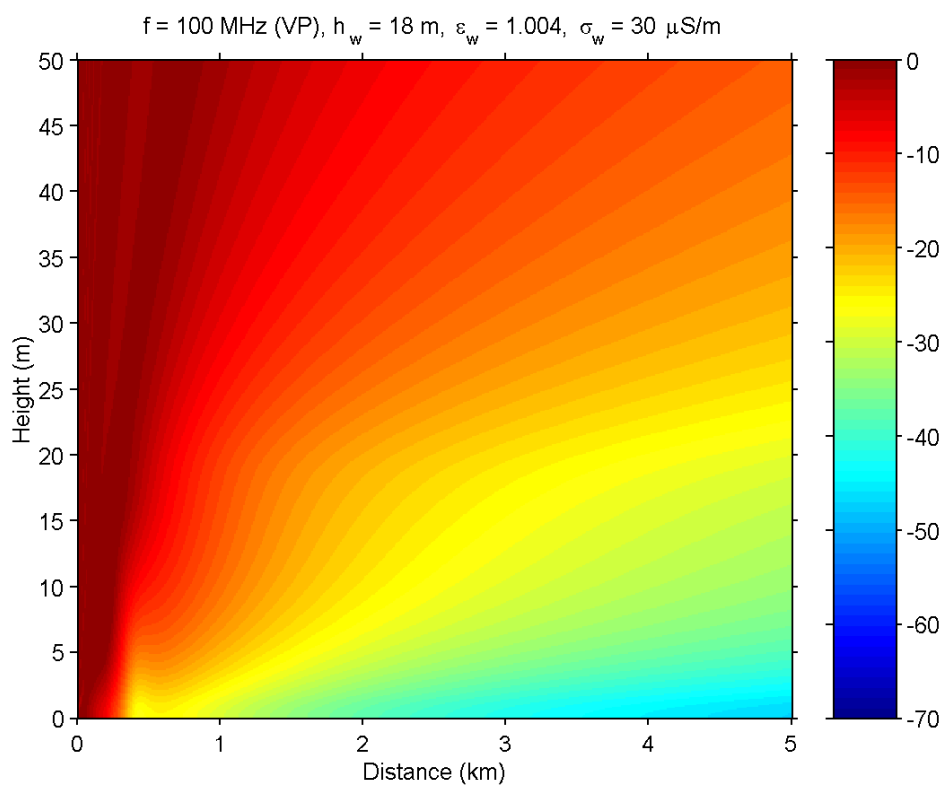
Figur 26. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 100 MHz, vertikal polarisation och normalatmosfär utan skog.



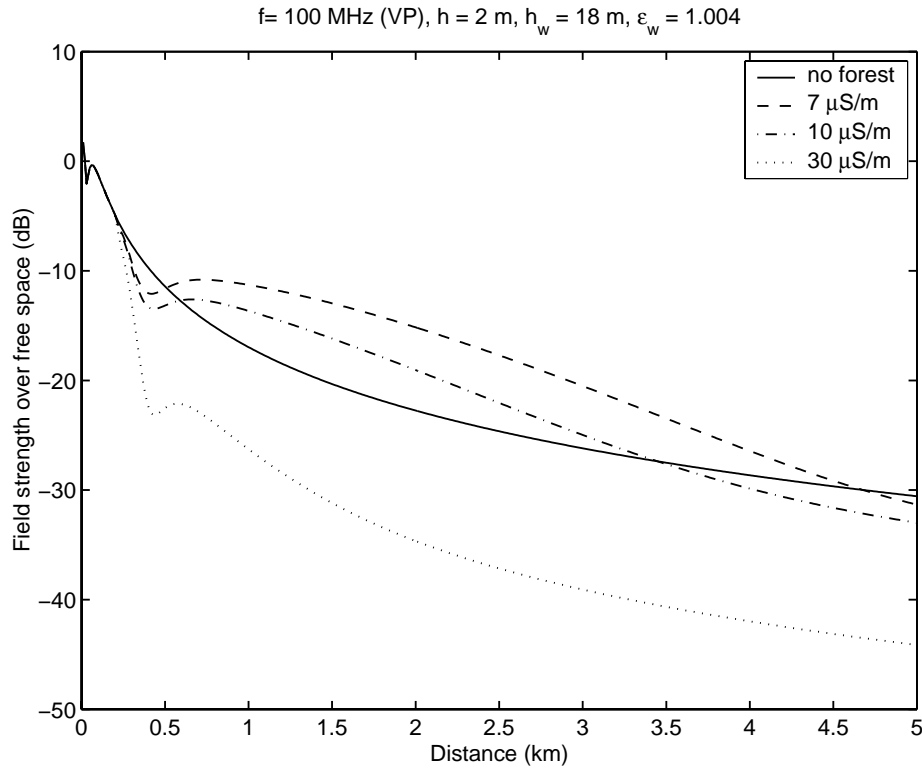
Figur 27. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 100 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma = 7$ μ S/m.



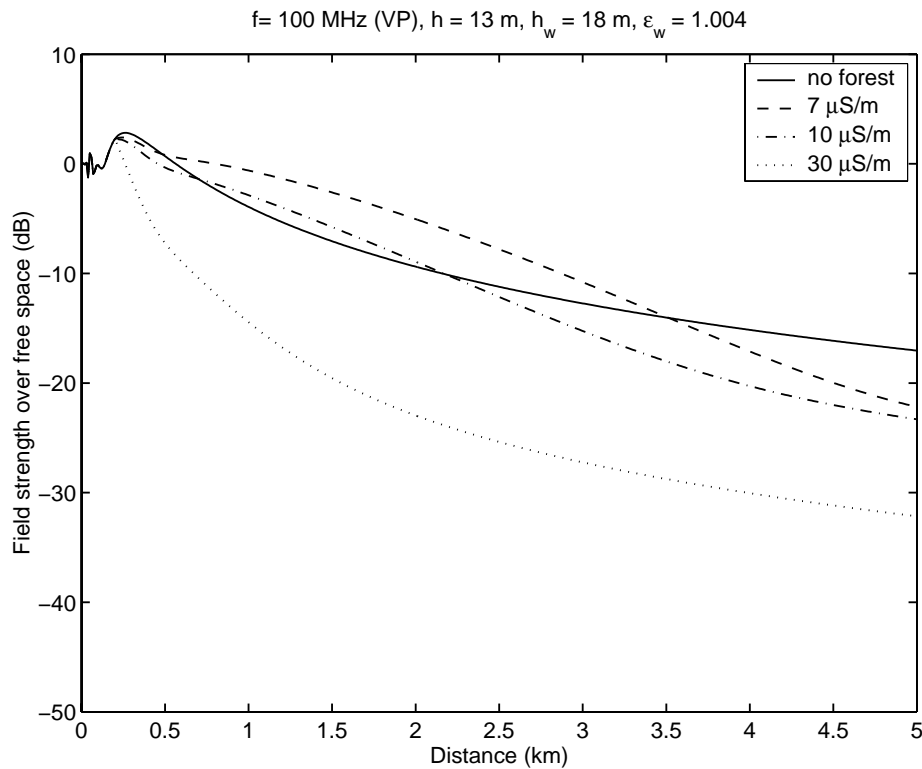
Figur 28. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 100 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=10 \text{ } \mu\text{S/m}$.



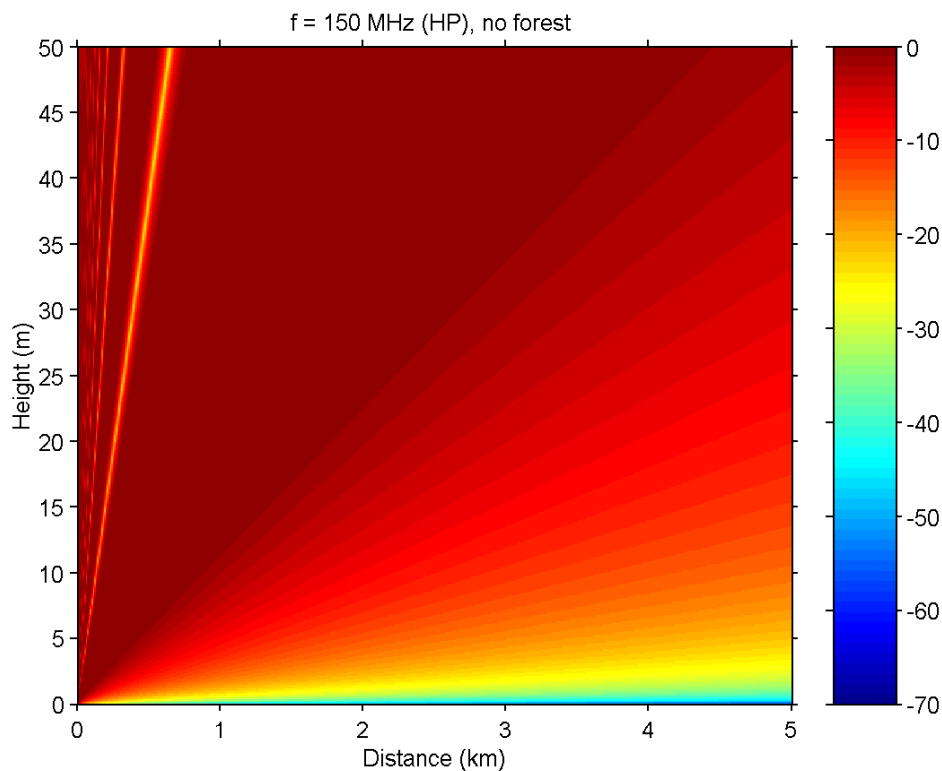
Figur 29. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 100 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=30 \text{ } \mu\text{S/m}$.



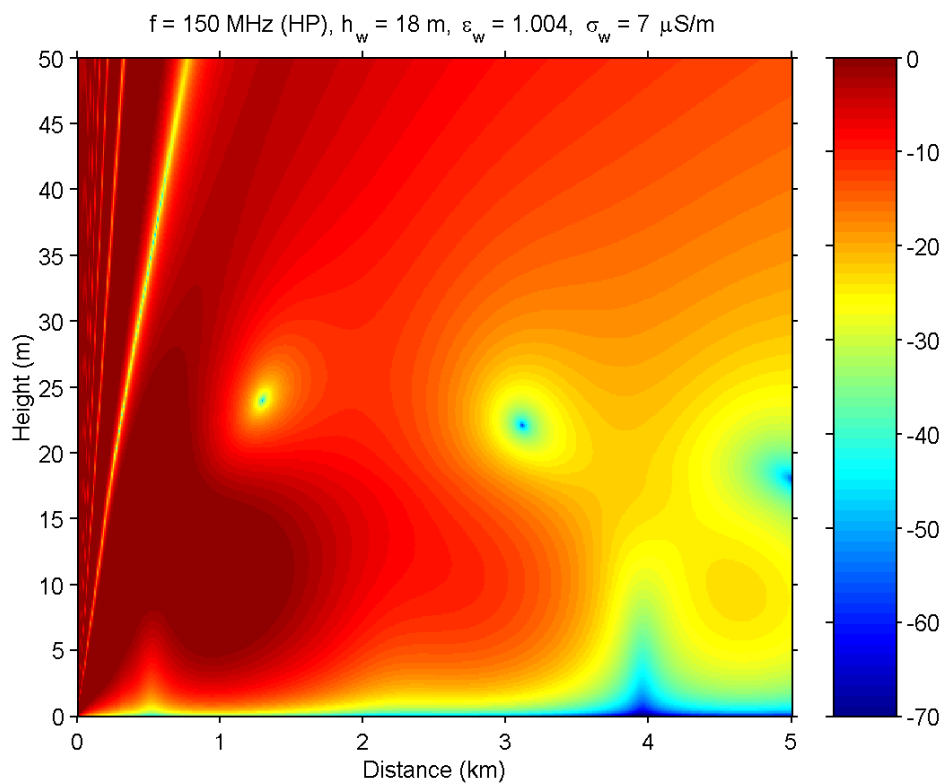
Figur 30. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 2 m, frekvensen 100 MHz och vertikal polarisation.



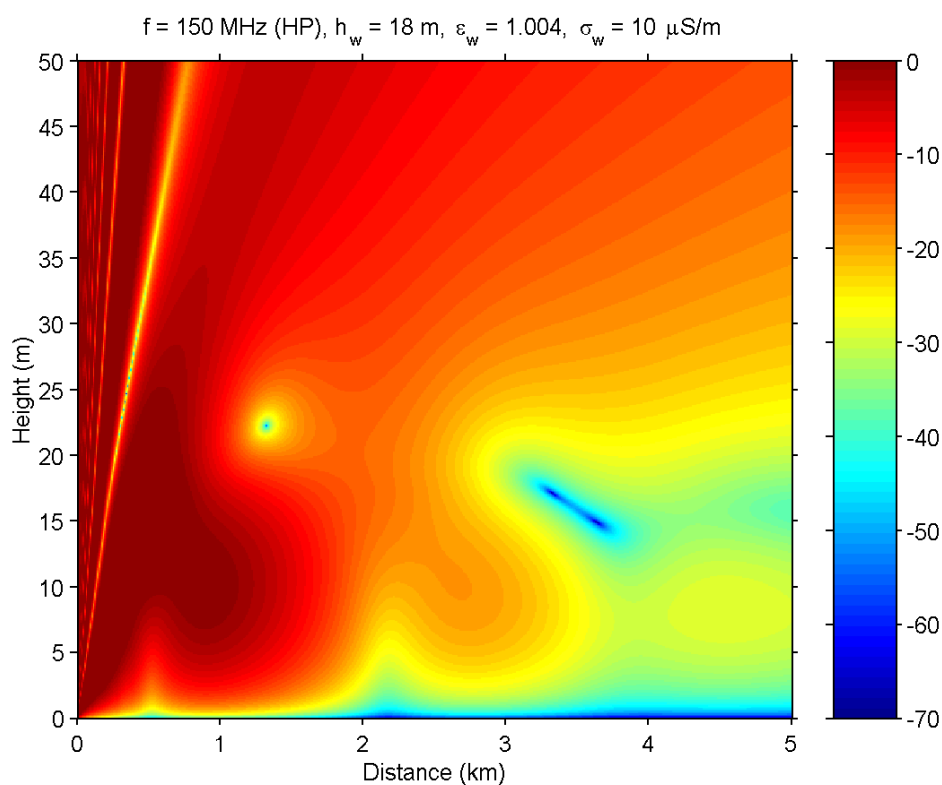
Figur 31. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 13 m, frekvensen 100 MHz och vertikal polarisation.



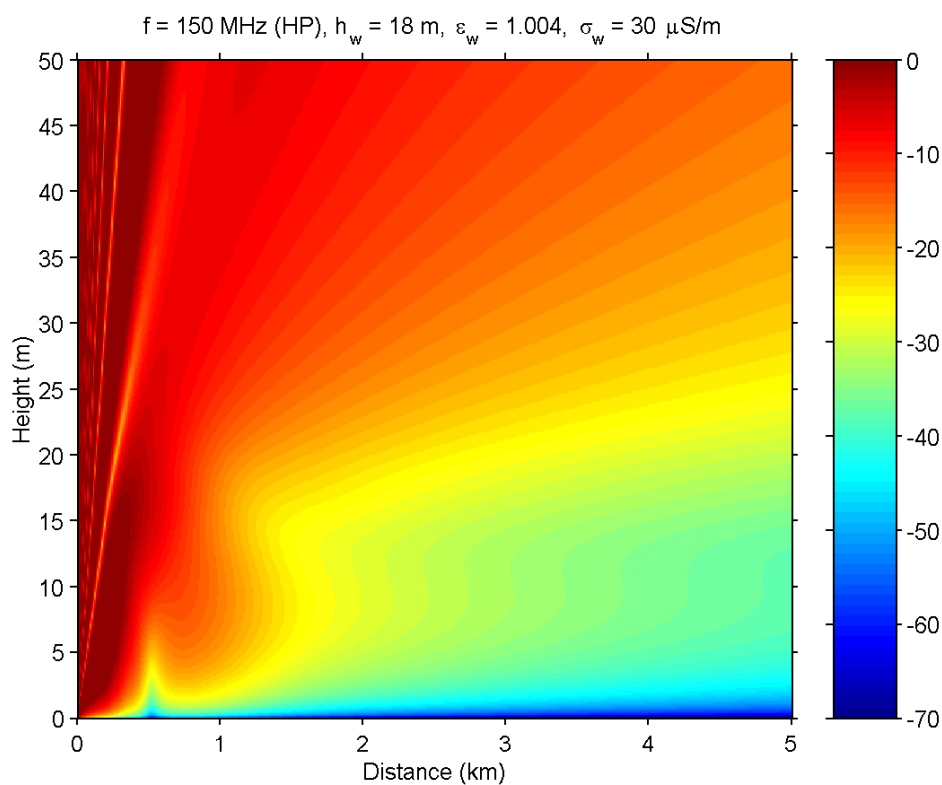
Figur 32. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 150 MHz, horisontell polarisation och normalatmosfär utan skog.



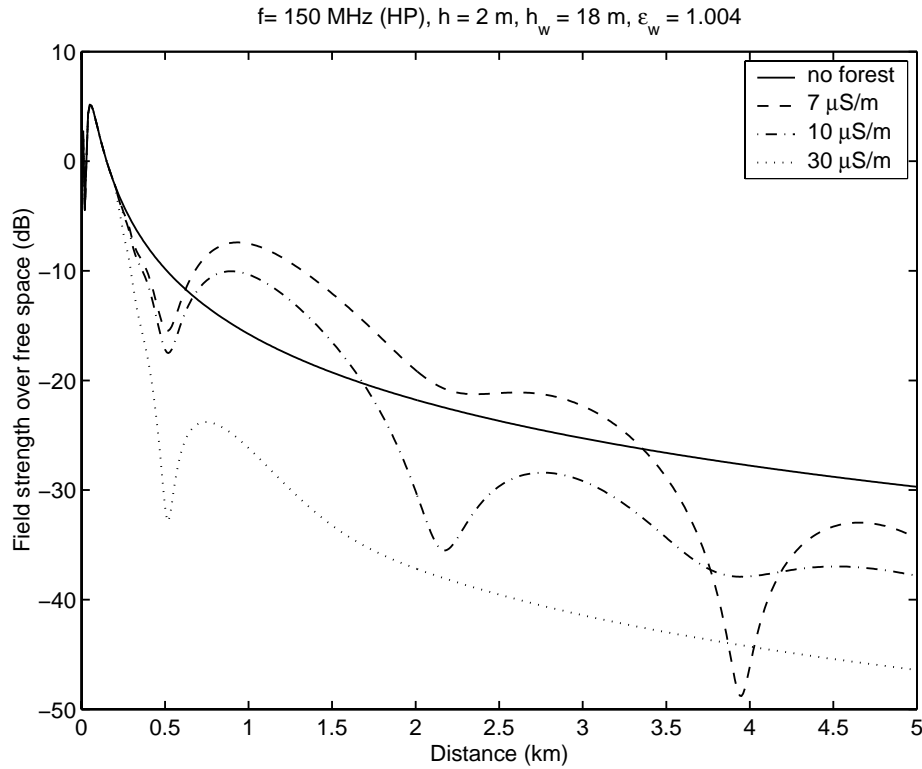
Figur 33. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 150 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma = 7$ μ S/m.



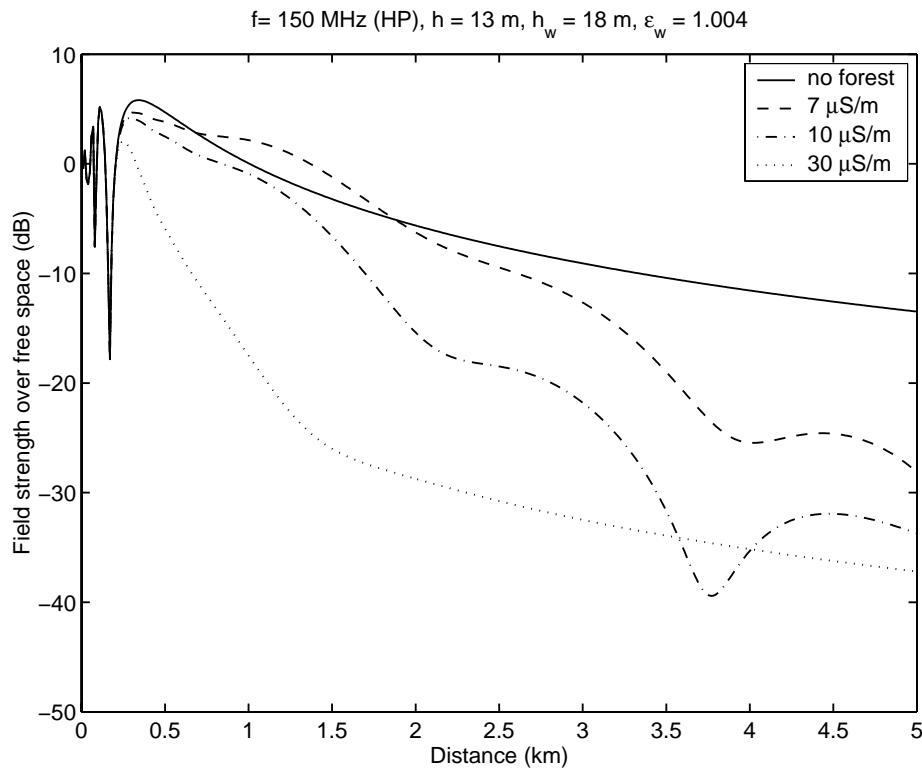
Figur 34. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 150 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=10 \text{ } \mu\text{S/m}$.



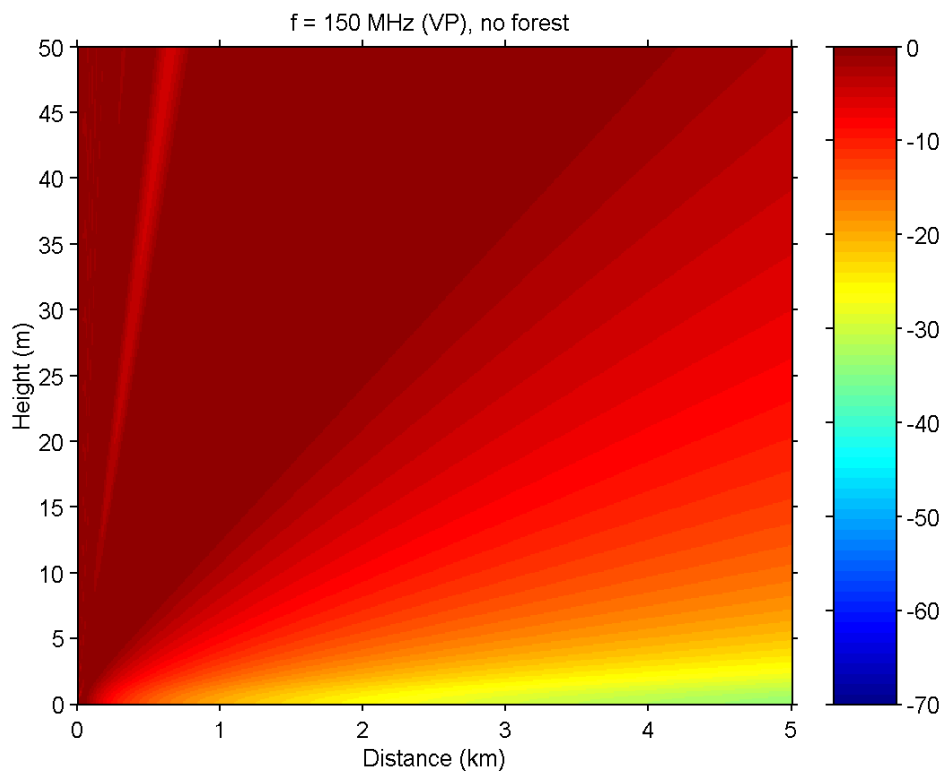
Figur 35. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 150 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=30 \text{ } \mu\text{S/m}$.



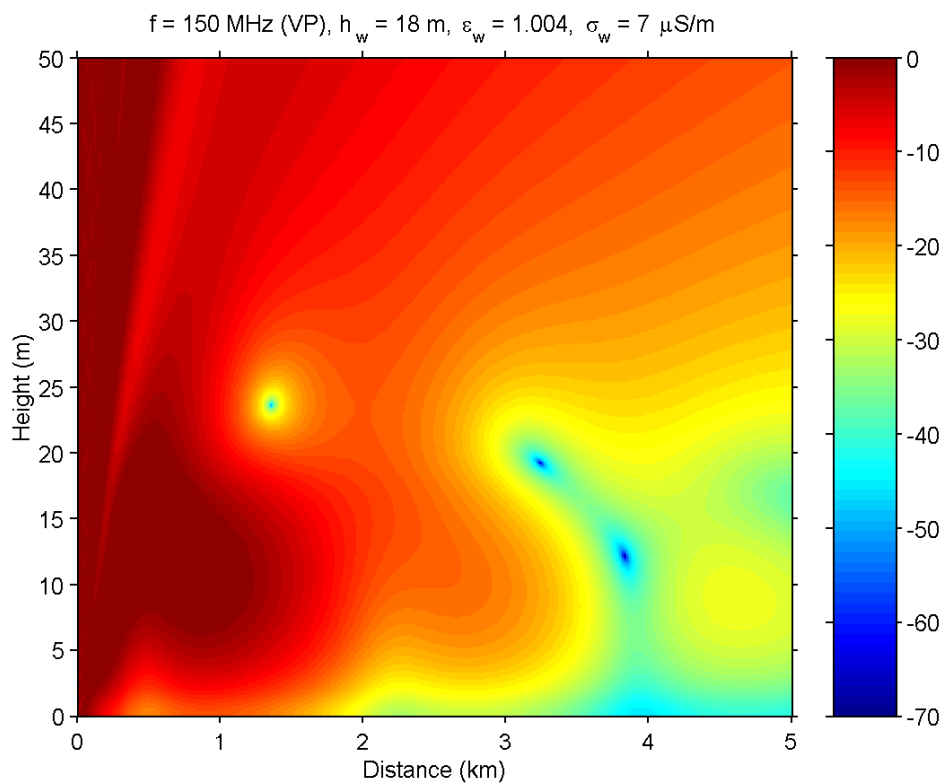
Figur 36. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 2 m, frekvensen 150 MHz och horisontell polarisation.



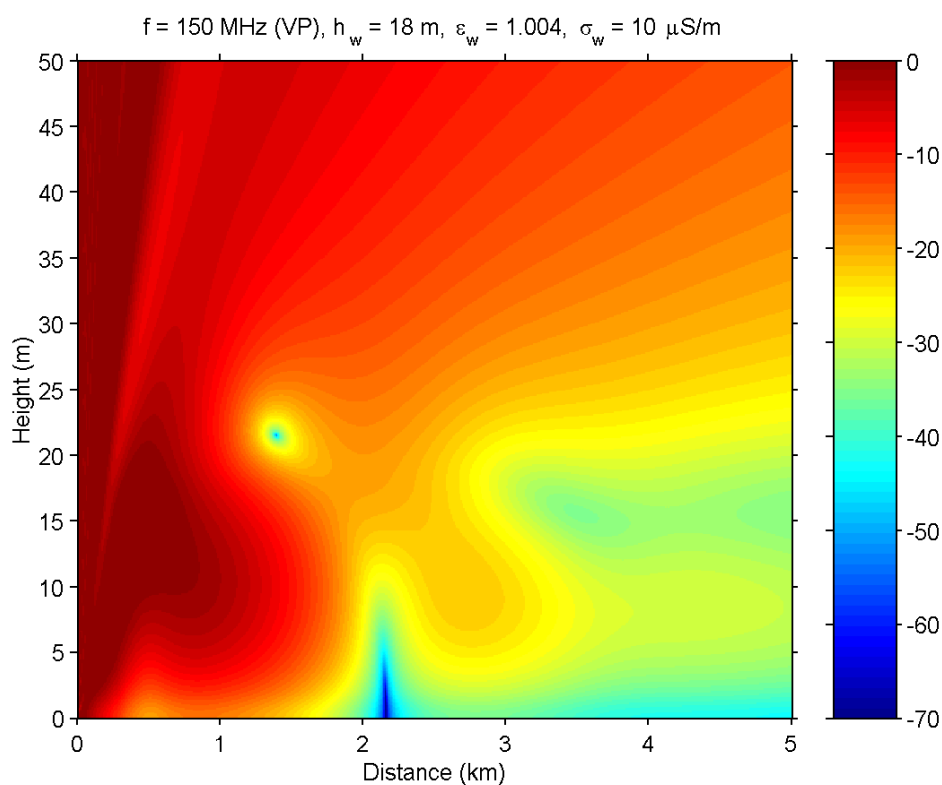
Figur 37. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 13 m, frekvensen 150 MHz och horisontell polarisation.



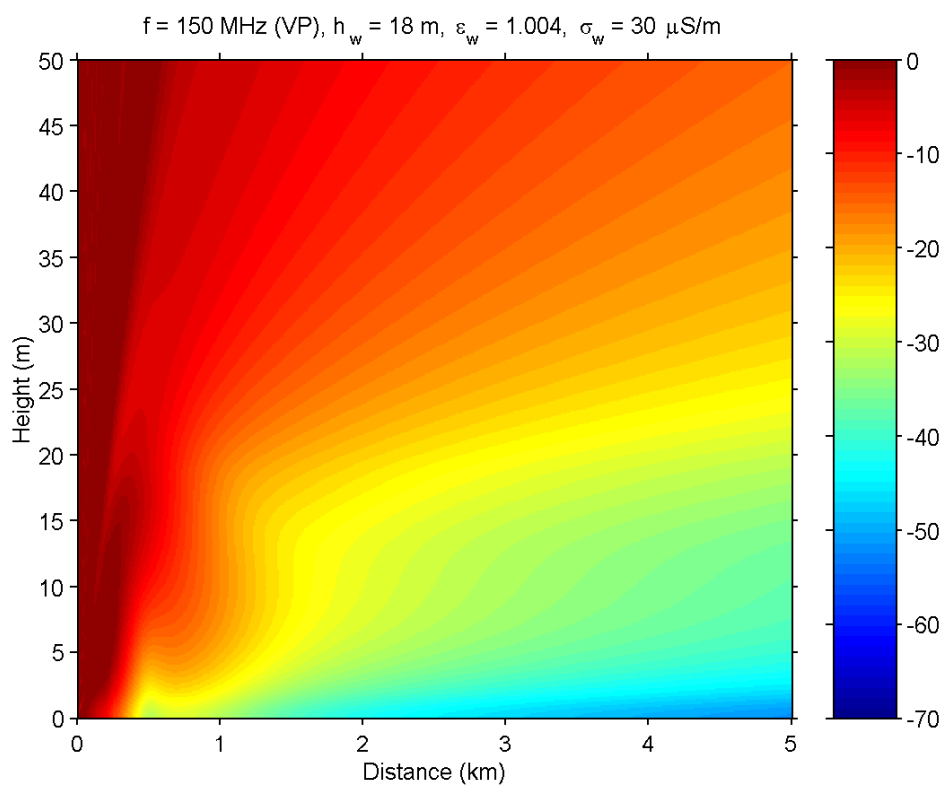
Figur 38. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 150 MHz, vertikal polarisation och normalatmosfär utan skog.



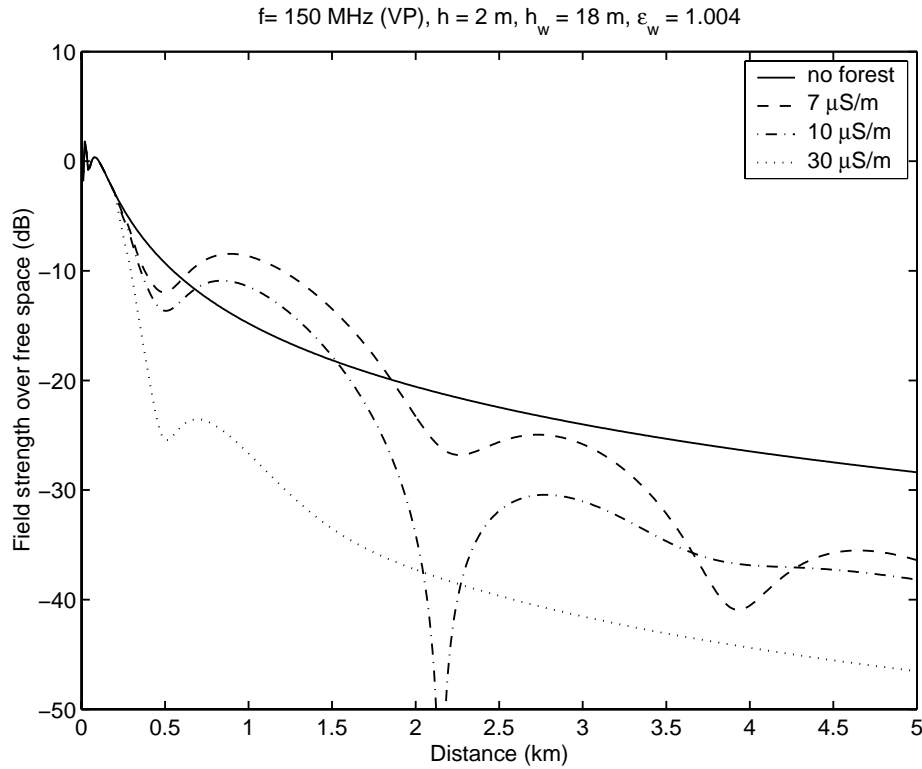
Figur 39. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 150 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma = 7$ $\mu\text{S/m}$.



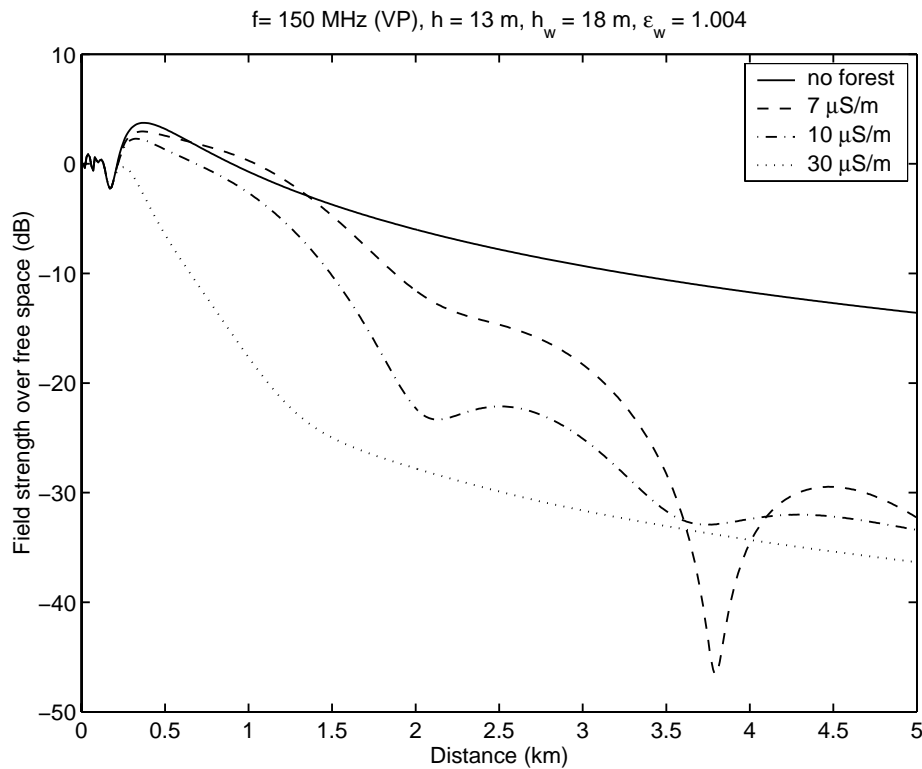
Figur 40. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 150 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=10 \text{ } \mu\text{S/m}$.



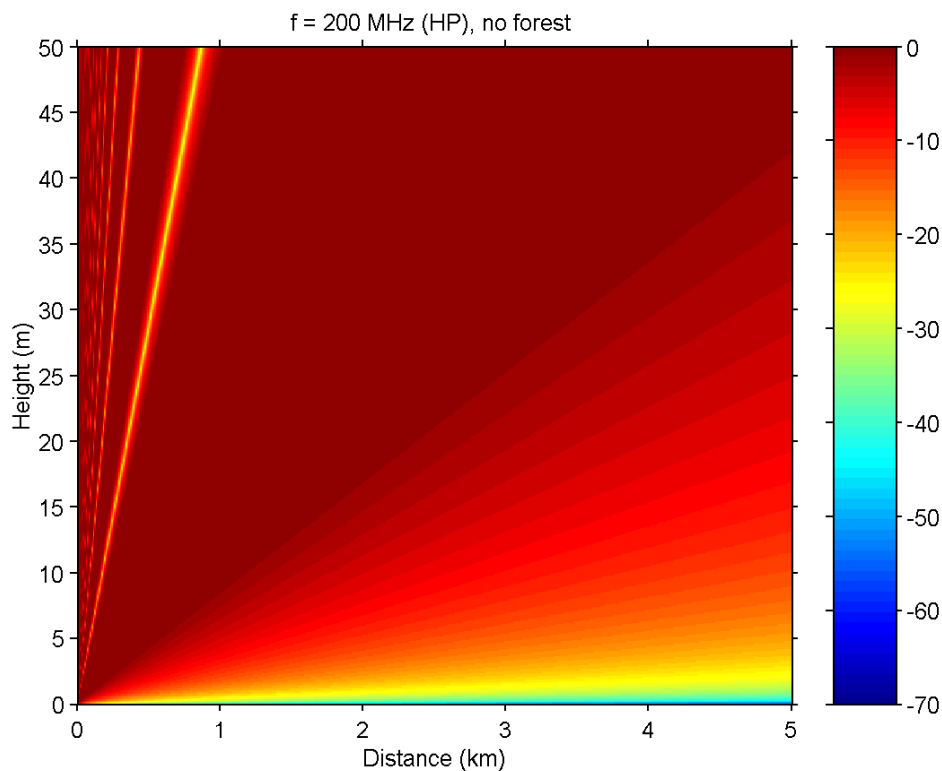
Figur 41. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 150 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=30 \text{ } \mu\text{S/m}$.



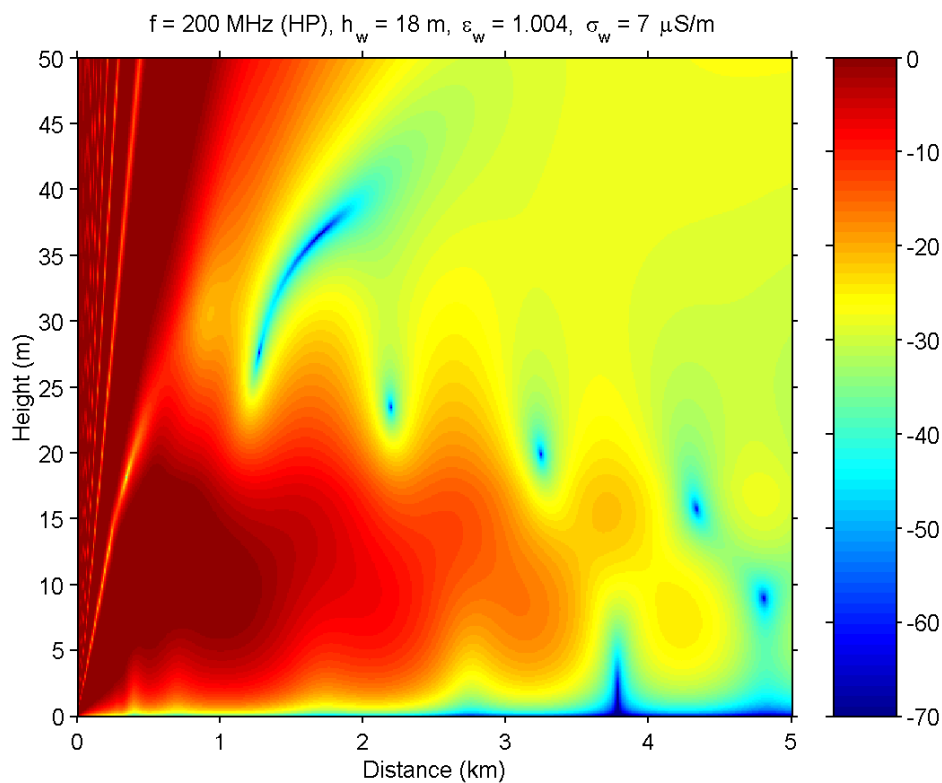
Figur 42. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 2 m, frekvensen 150 MHz och vertikal polarisation.



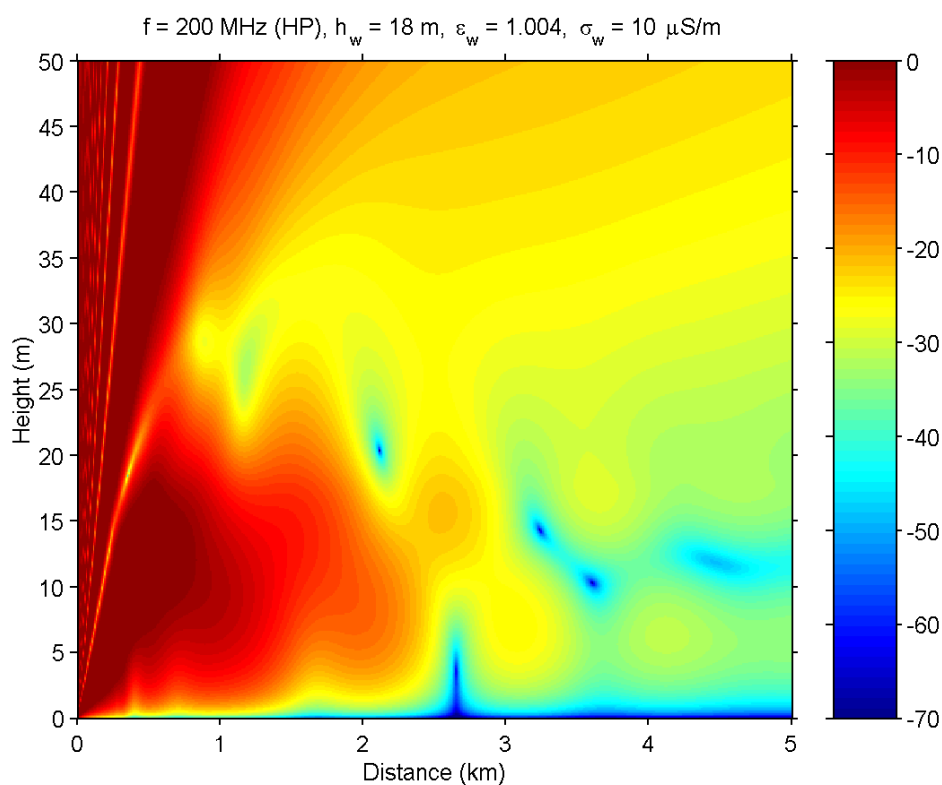
Figur 43. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 13 m, frekvensen 150 MHz och vertikal polarisation.



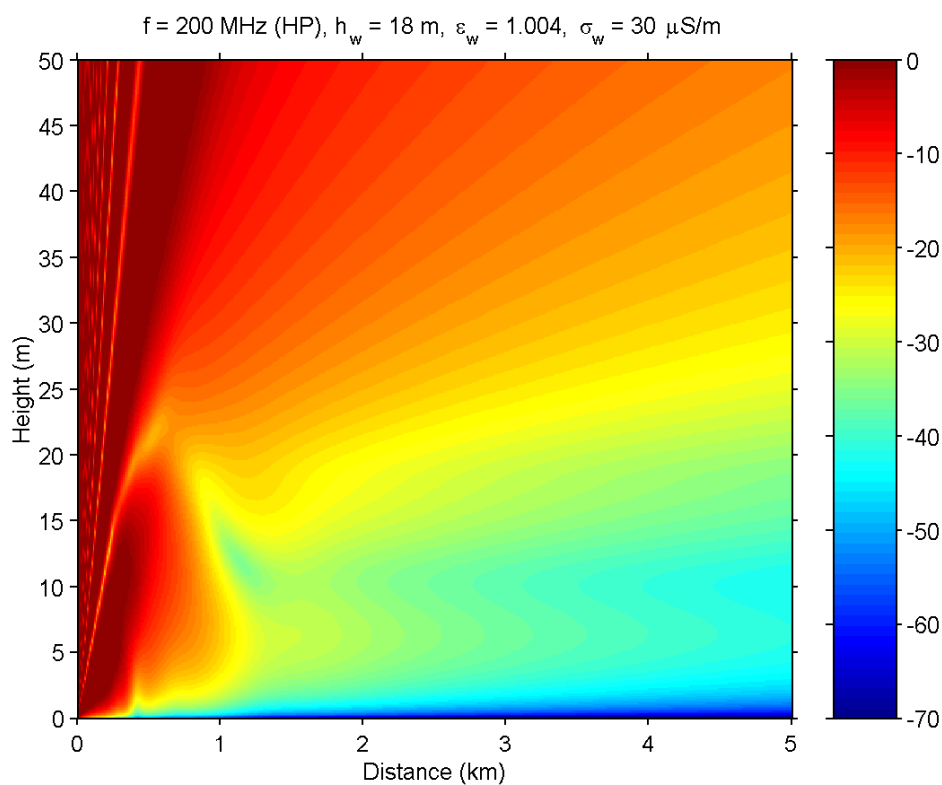
Figur 44. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 200 MHz, horisontell polarisation och normalatmosfär utan skog.



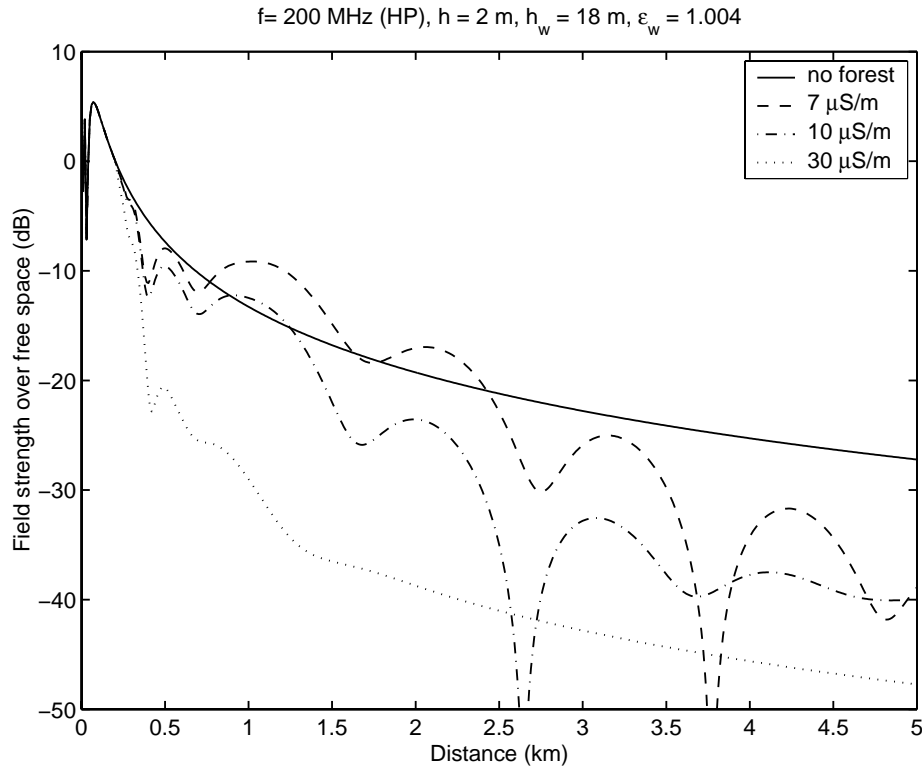
Figur 45. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 200 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma = 7$ $\mu\text{S/m}$.



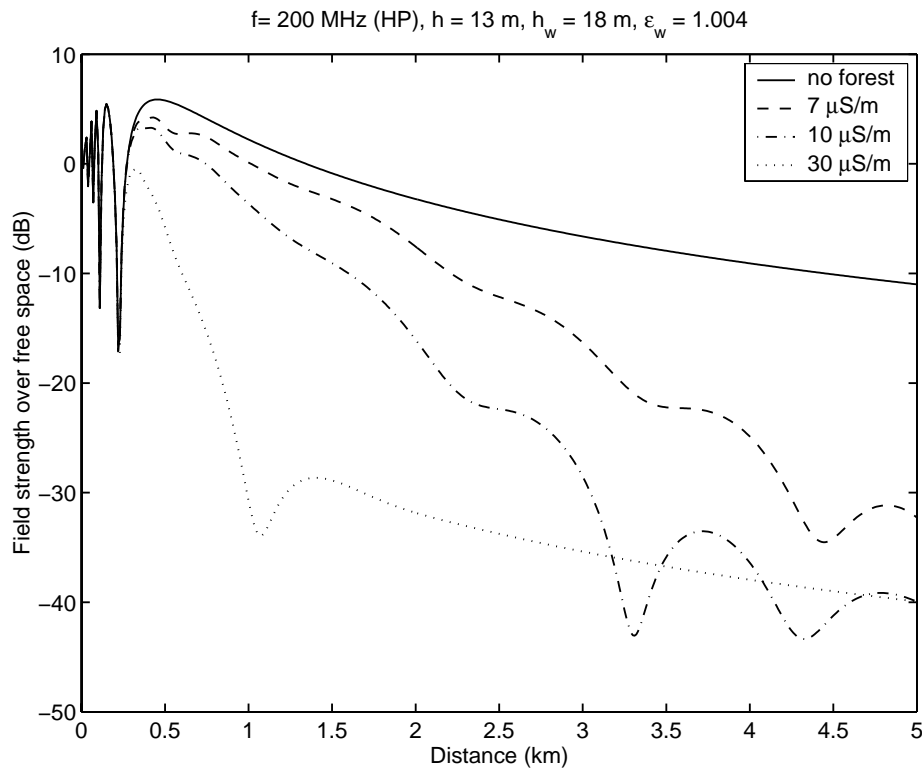
Figur 46. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 200 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=10 \text{ } \mu\text{S/m}$.



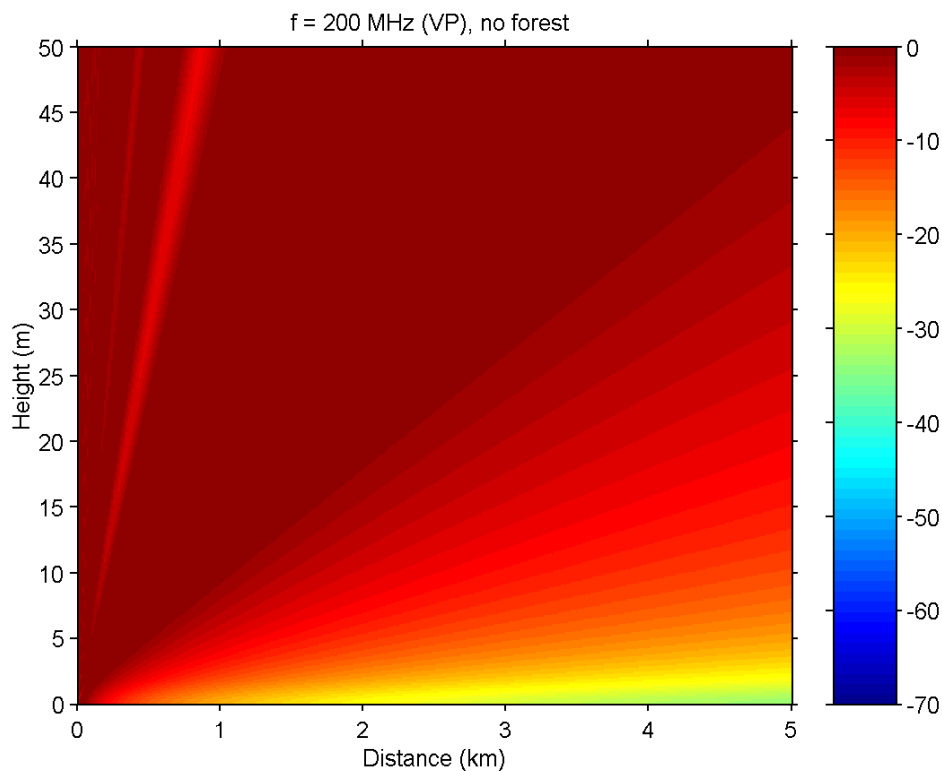
Figur 47. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 200 MHz, horisontell polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=30 \text{ } \mu\text{S/m}$.



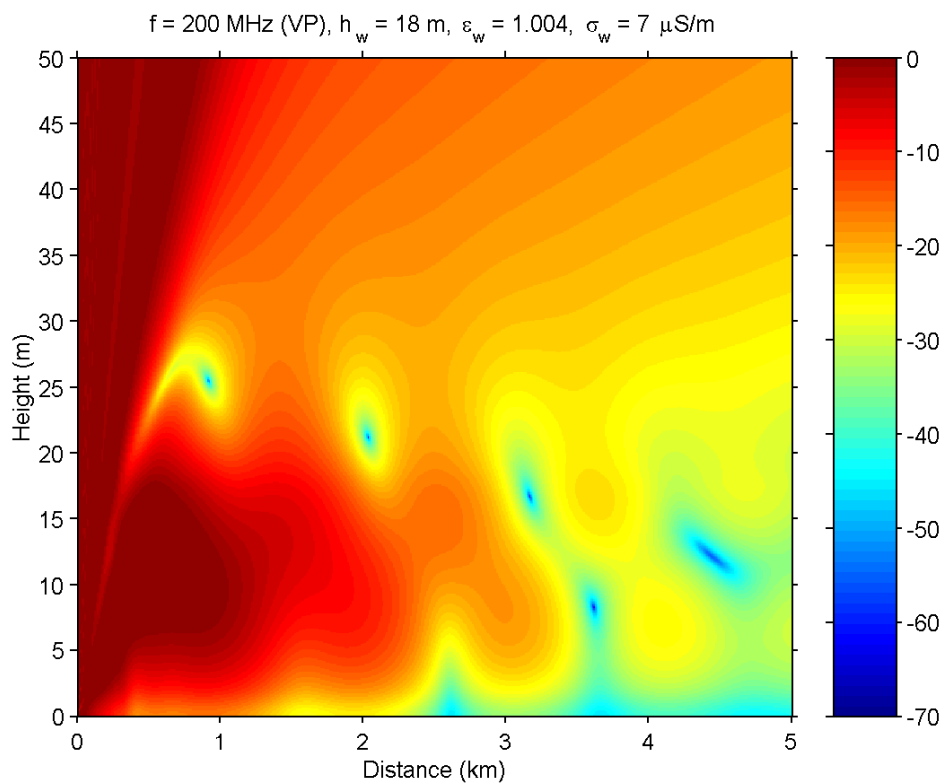
Figur 48. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 2 m, frekvensen 200 MHz och horisontell polarisation.



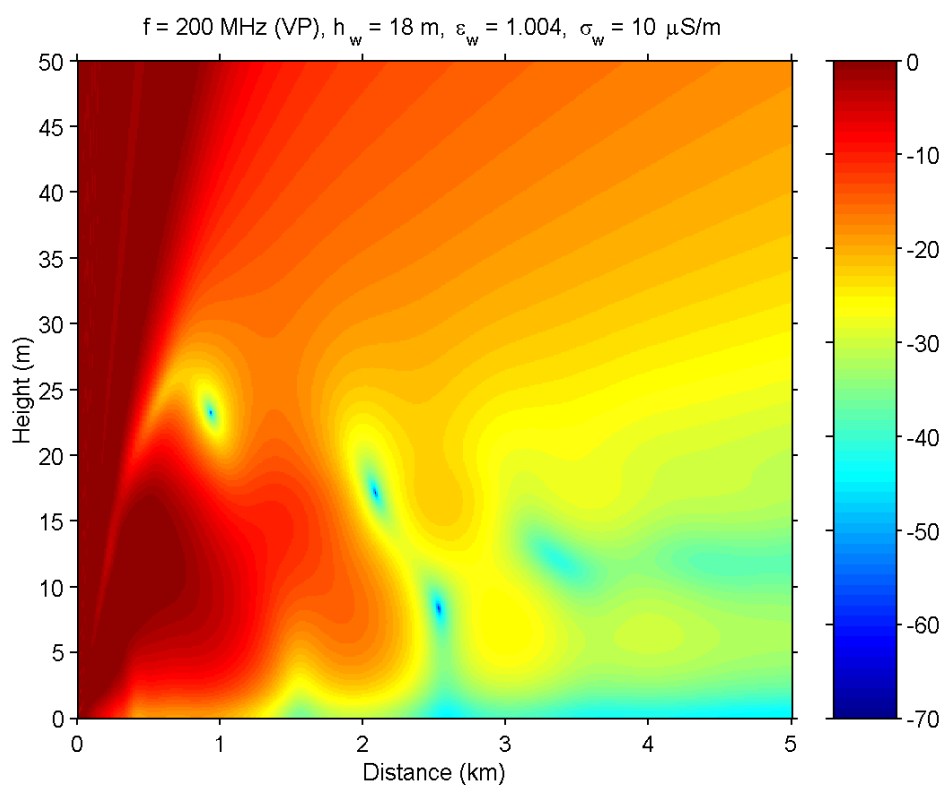
Figur 49. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 13 m, frekvensen 200 MHz och horisontell polarisation.



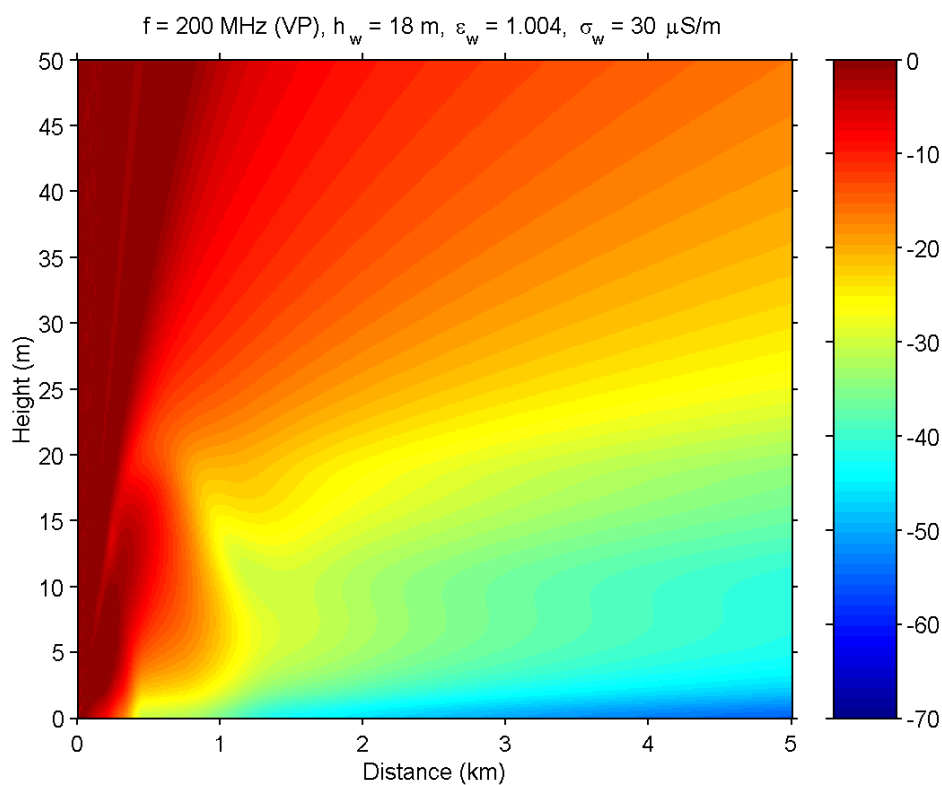
Figur 50. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 200 MHz, vertikal polarisation och normalatmosfär utan skog.



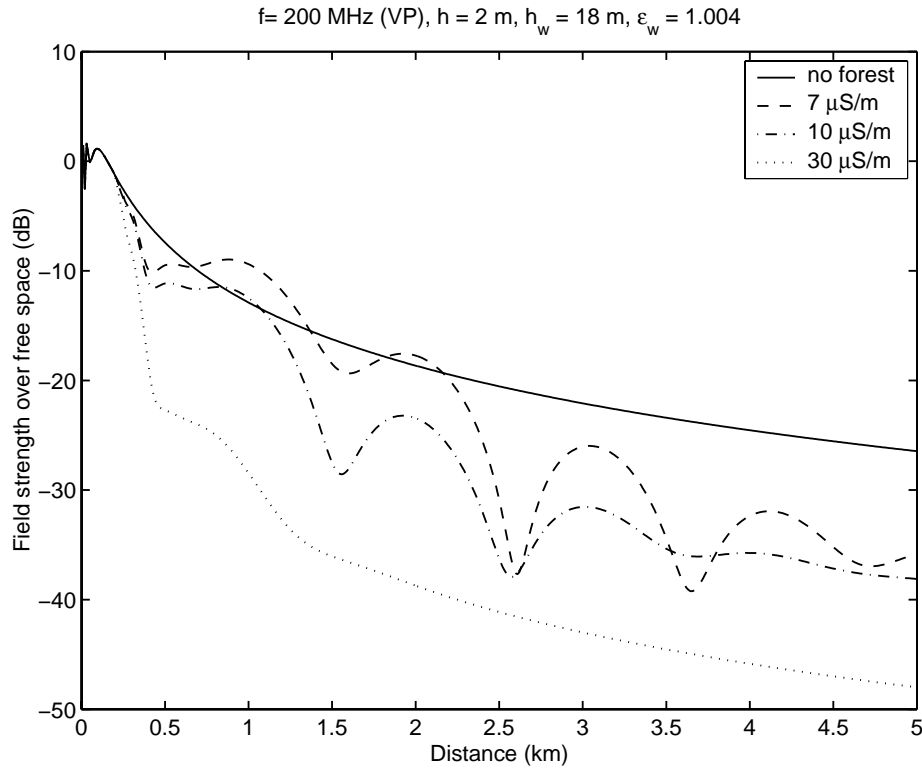
Figur 51. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 200 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma = 7$ μ S/m.



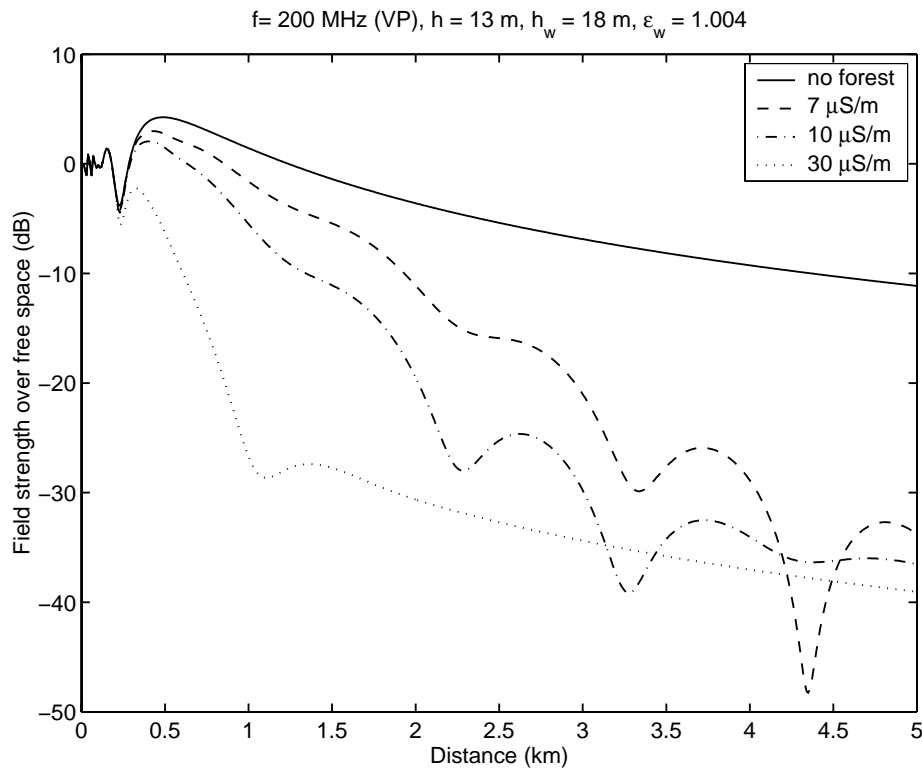
Figur 52. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 200 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=10 \text{ } \mu\text{S/m}$.



Figur 53. Tvådimensionell färgplott som visar dämpningen relativt frirymdsdämpningen för frekvensen 200 MHz, vertikal polarisation och skogskonduktiviteten $\sigma=30 \text{ } \mu\text{S/m}$.



Figur 54. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 2 m, frekvensen 200 MHz och vertikal polarisation.



Figur 55. Dämpning relativt frirymdsdämpning (utbredningsfaktor) för höjden 13 m, frekvensen 200 MHz och vertikal polarisation.

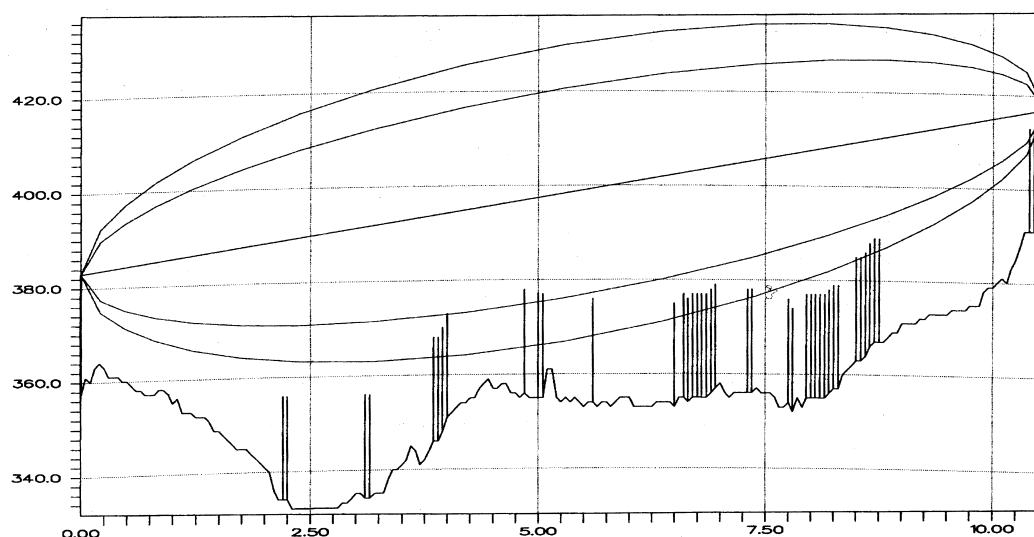
7.2 Jämförelse med mätningar

PE-modellen har testats mot mätningar i ett granskogsområde i närheten av Östersund. Mätningarna utfördes i November 2000. Mätuppställningen var utformad med tanke på att undersöka effekten av en skogskant nära en mottagarantenn för en militär taktisk frekvenshoppande radiolänk.

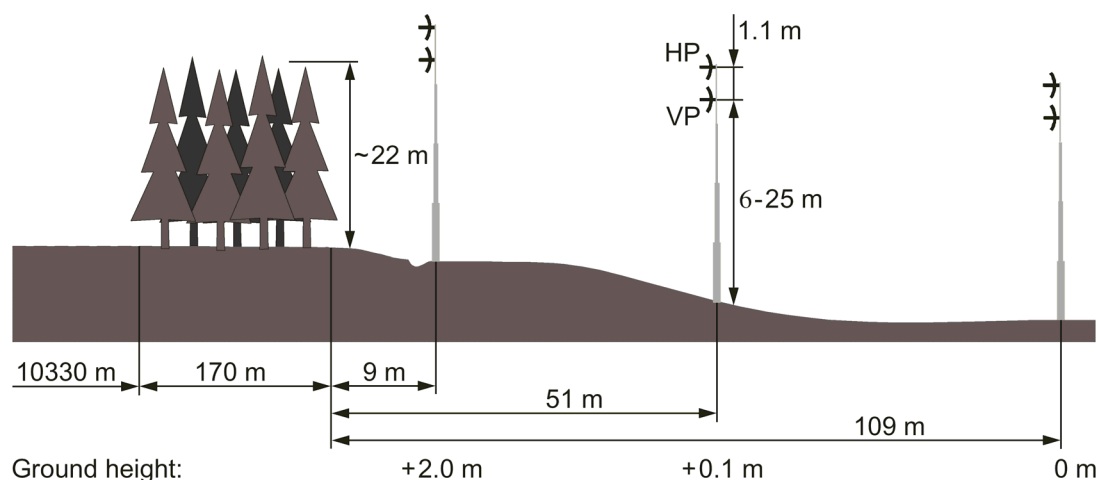
7.2.1 Mätssystem och mätuppställning

Mätssystemet bestod av en sändare och mottagare som sveptes synkront i frekvens över några delband inom frekvensområdet 1.35 –1.85 GHz med steget 1 MHz. Bredden på varje delband varierade mellan 2.4 och 25 MHz och det totala mätta frekvensområdet var 156 MHz. Sändaren hade en uteffekt på 10 W och antennerna utgjordes av nätparaboler med en antennvinst på 20 dBi och en 3 dB:s lobbredd på ca. 14°. Länkmarginalen för mätuppställningen var minst 75 dB, räknat på utbredning i fritt rum, vilket möjliggjorde uppmätning av relativt stora tillskottsdämpningar från skogshindret.

Terrängprofilen för mätsträckan kan ses i figur 56. Förutom den sista skogstäckta delen av sträckan nära mottagaren är första och andra fresnelzonen i stort sett fria. Skogsområdet i slutet av mätsträckan var en ca. 170 m bred relativt homogen granskog följt av öppen mark. Träden var jämnt åldrade och hade en maximal höjd på ca. 22 m. Övergången från skog till öppen mark var skarp. Avståndet mellan sändaren och skogskanten var vidare ungefär 10.5 km.



Figur 56. Terrängprofil längs med mätsträckan. Profilen har en upplösning på 50 m och de vertikala staplarna indikerar segment täckta av skog. Den första och andra fresnelzonen visad i figuren är för frekvensen 1600 MHz, mottagarhöjden 25 m och sändarhöjden 26 m över markytan.



Figur 57. Geometrin på mottagarsidan.

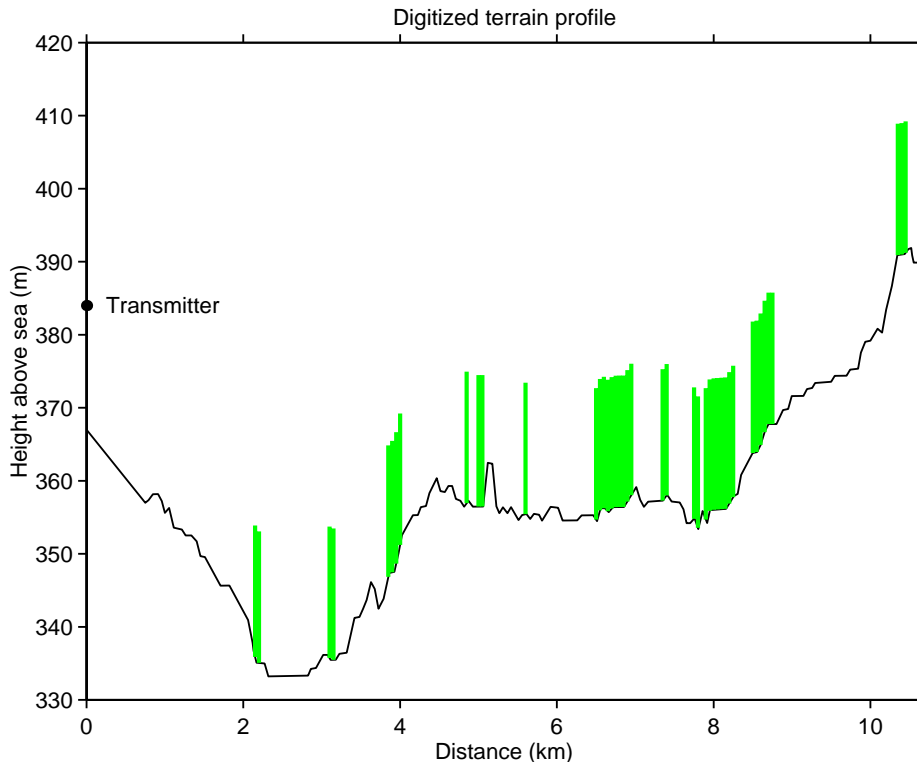
Installationen vid varje antennplats bestod av två likadana antenner, en monterad för vertikal och en för horisontell polarisation, vilket gjorde det möjligt att elektriskt växla mellan de två polarisationerna. På sändarsidan var den vertikala och horisontella antennen placerade på höjden 26 respektive 26.9 m över markytan. På mottagarsidan var de två antennerna monterade på en mast som var justerbar i höjddled. De två antennerna var vidare separerade 1.1 m vertikalt, med den horisontella antennen högst upp. Höjden över marken kunde varieras mellan 6 och 25 m (räknat från den lägre av de två antennerna).

Mätningarna var gjorda med mottagarantennerna placerade i det öppna området på tre olika avstånd från skogskanten. Den första placeringen var lokaliserad 9 m bakom skogskanten, den andra 51 m och den tredje 109 m, se figur 57. För var och en av dessa placeringar varierades antennhöjden mellan 6 och 25 m med ett steg på ca. 2 m.

7.2.2 Modellering av terräng och källa

Figur 56 visar höjdprofilen för terrängen längs med mätsträckan. Figur 58 är den digitaliserade höjdprofilen, där de gröna staplarna representerar områden med skog. Början av denna profil är vidare approximerad med ett lutande plan vars utsträckning i längdled är 750 m. Anledningen till denna approximation är att begynnelsefältet till PE-modellen måste beräknas en bit bort från källan (se avsnitt 4) och för att göra det används vanlig geometrisk optik.

Varje segment i figur 58 som är täckt med skog approximeras med en dielektrisk skiva som följer terrängen. Skivan karakteriseras med en höjd, en relativ permittivitet ϵ_r and konduktivitet σ . Värdena på dessa väljs vidare på ett sådant sätt att någorlunda överensstämmelse fås mellan teori och experiment.



Figur 58. Approximerad terrängprofil där de gröna vertikala staplarna indikerar segment (50 m) täckta med skog.

Det vertikala begynnelsefältet till PE-modellen beräknas med hjälp av geometrisk optik för en punktkälla vid avståndet 750 m. Detta fält marscheras sedan i avstånd med steglängden 0.25 m fram till 10650 m. Beräkningshöjden i varje snitt är 1000 m med ett beräkningssteg på 0.05 m. Dessa steg är inte optimala utan har valts för att ge en bra upplösning i de färgplottar som visas senare. Absorptionskiktets tjocklek har vidare satts till 50 % av den totala beräkningshöjden, dvs. 500 m.

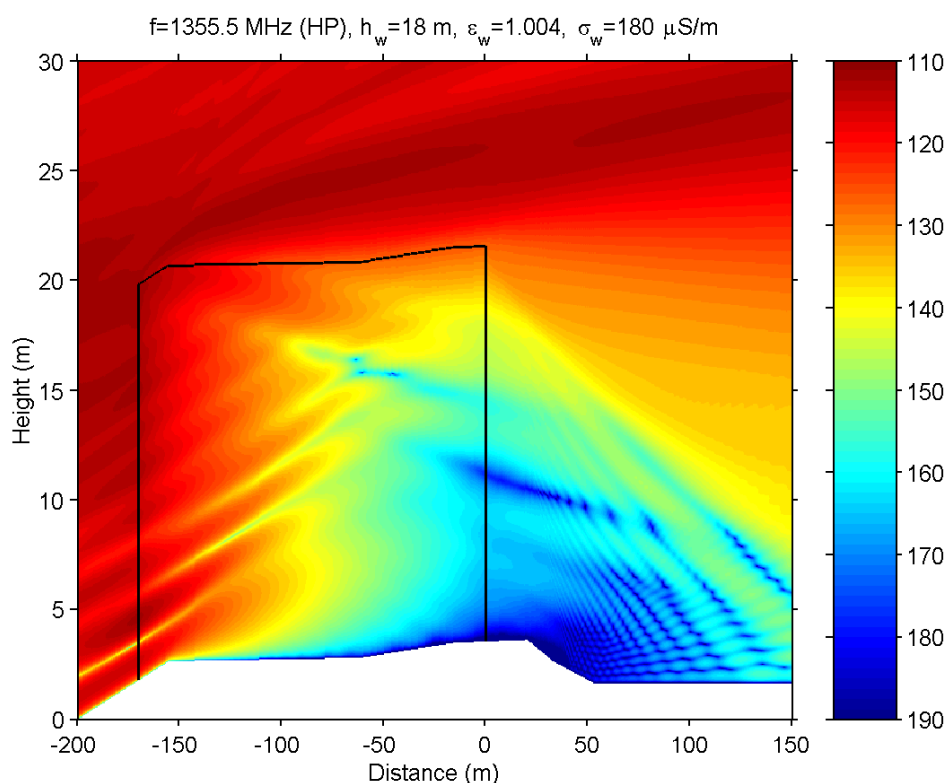
Eftersom källan modelleras som en punktkälla måste denna dämpas via ett pålagt filter för att inte för stora vinklar ska erhållas och det filter som användes var ett exponentiellt avtagande gaussiska filter, se avsnitt 5. Detta gavs sådana värden att dämpningen var ca. 3 dB vid $\pm 7^\circ$, vilket helt enkelt har att göra med att den verkliga källan har en 3 dB:s lobbredd på ca. 14° . Detta är också den ända hänsyn som har tagits till källans strålningsdiagram. Teoretiskt visade det sig nämligen att källans lobbredd var av ganska liten betydelse för den aktuella vågutbredningsgeometrin (definierad via figur 56-58). Vinkeln får betydelse först vid ca. 10° och nedåt.

7.2.3 Resultat

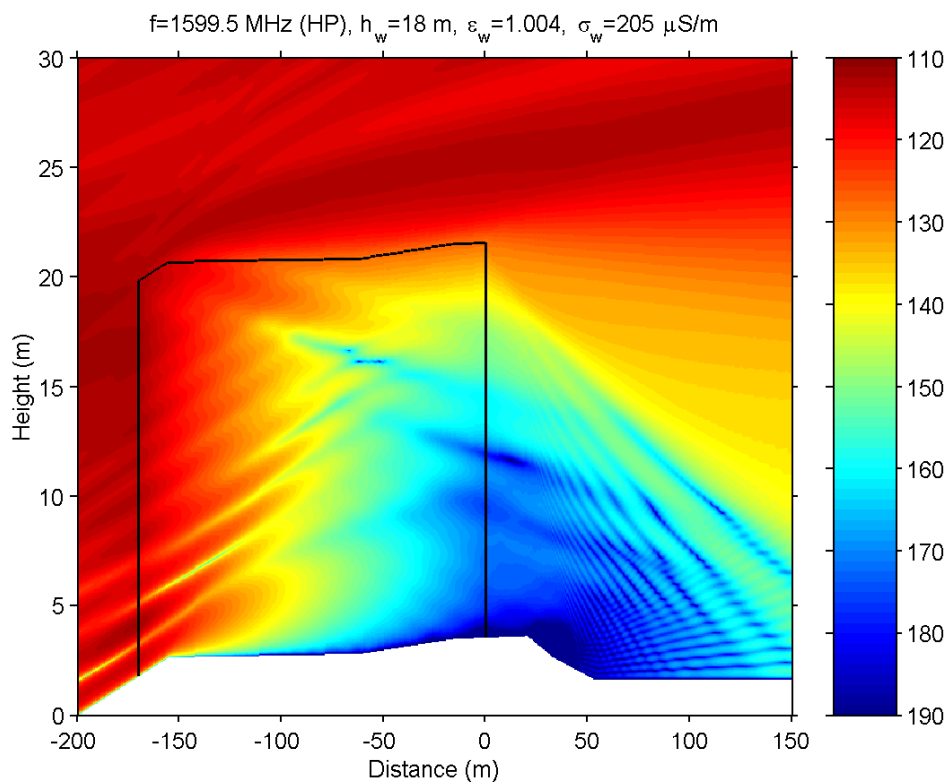
Mätningar har gjorts för en stor mängd olika frekvenser. Jämförelserna här har dock begränsats till tre frekvenser och horisontell polarisation, och de valda frekvenserna är 1355.5, 1599.5 och 1799.5 MHz. I figur 59-61 kan man se vilket resultat PE-modellen ger

för dessa frekvenser. Här visas erhållen transmissionsförlust för den sista delen av mätsträckan i ett 650m×30m stort område. Alla skogsområden längs med mätsträckan har i dessa beräkningar tilldelats höjden 18 m och den relativa permittiviteten 1.004. Konduktiviteten för skogsområdena har vidare satts till 180, 205 och 225 $\mu\text{S}/\text{m}$ för frekvenserna 1355.5, 1599.5 respektive 1799.5 MHz. Den relativa permittivitet och konduktiviteten för marken, som inte påverkar resultatet nämnvärt, har satts till 15 respektive 10^{-3} S/m. I [Holm m.fl., 2002] har samma jämförelse gjorts, men här har skogen för de tre frekvenserna getts något annorlunda värden vad det gäller relativ permittivitet och konduktivitet. I [Holm m.fl., 2002] används också en mer approximativ terrängprofil.

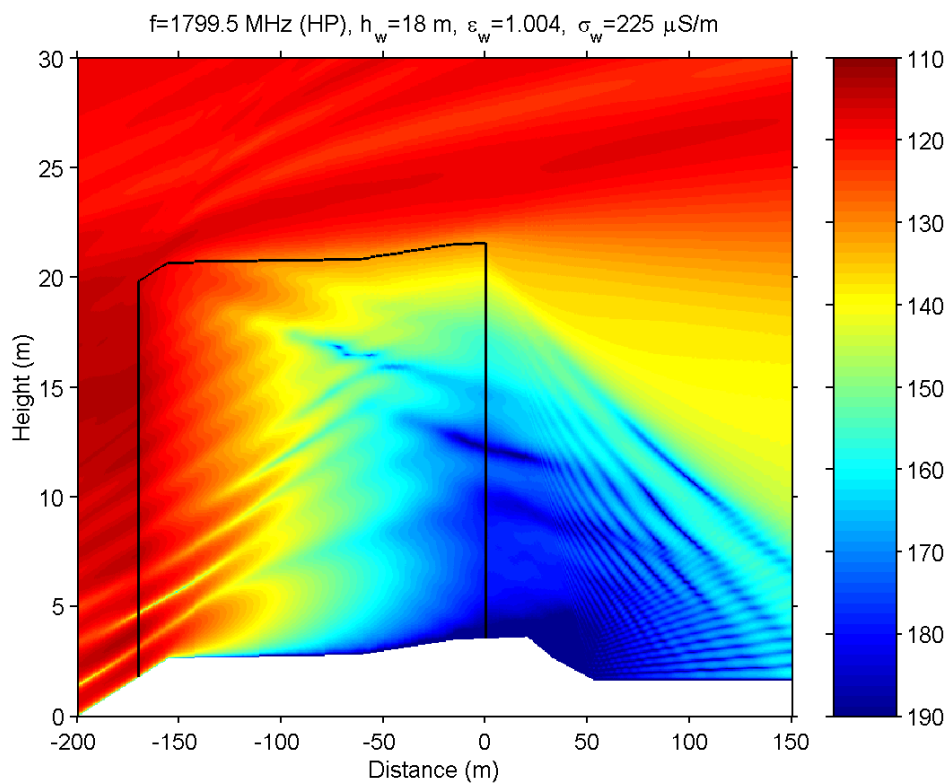
Figur 59-61 visar att fältet som utbreder sig inne i skogsskivan dämpas relativt snabbt. Å andra sidan indikerar de också att huvudbidraget till fältet nära skogskanten går igenom snarare än diffrakteras över den. För längre avstånd från skogskanten samverkar diffraktions- och transmissionsbidragen. Fältmönstret är för övrigt ganska likartat för alla tre frekvenserna, men mer energi diffrakteras in i skuggzonen för de lägre frekvenserna.



Figur 59. Transmissionsförlust för frekvensen 1355.5 MHz. Skogen i slutet av utbredningssträckan befinner sig mellan -170 och 0 m. Dess höjd och konduktivitet har satts till 18 m respektive 180 $\mu\text{S}/\text{m}$. Skogsområdets gränser har markerats med en heldragen svart linje. Höjden noll i figuren är lokaliserad ungefär 388 m över havsytan. I botten av figuren är den (digitaliserade) terrängprofilen synlig.



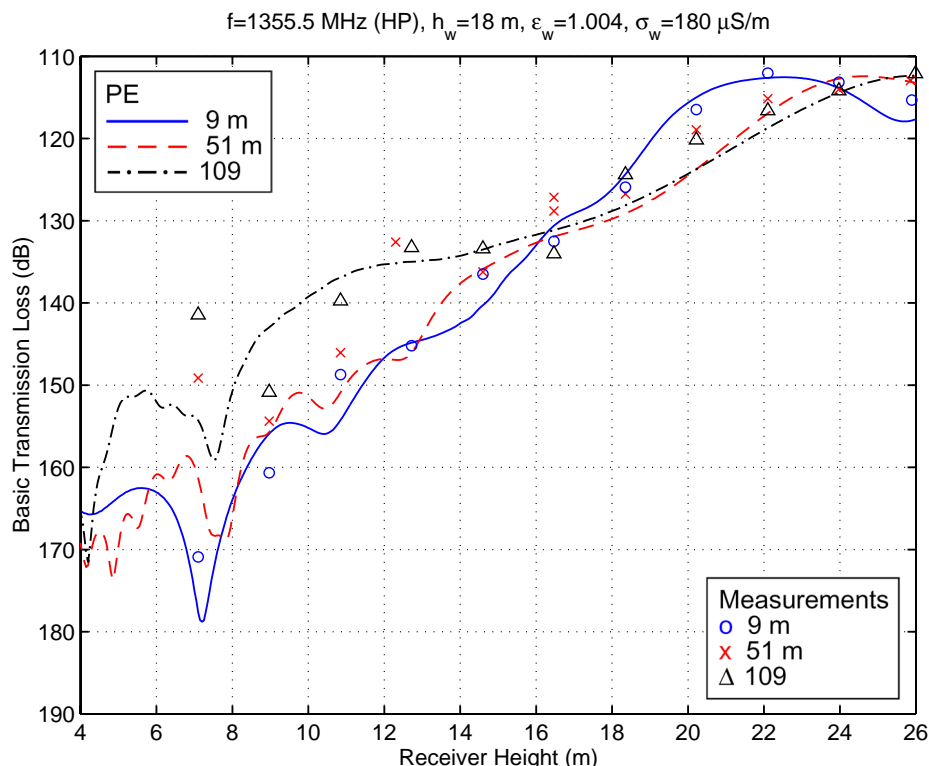
Figur 60. Samma som i figur 59 men för frekvensen 1599.5 MHz och konduktiviteten 205 $\mu\text{S/m}$.



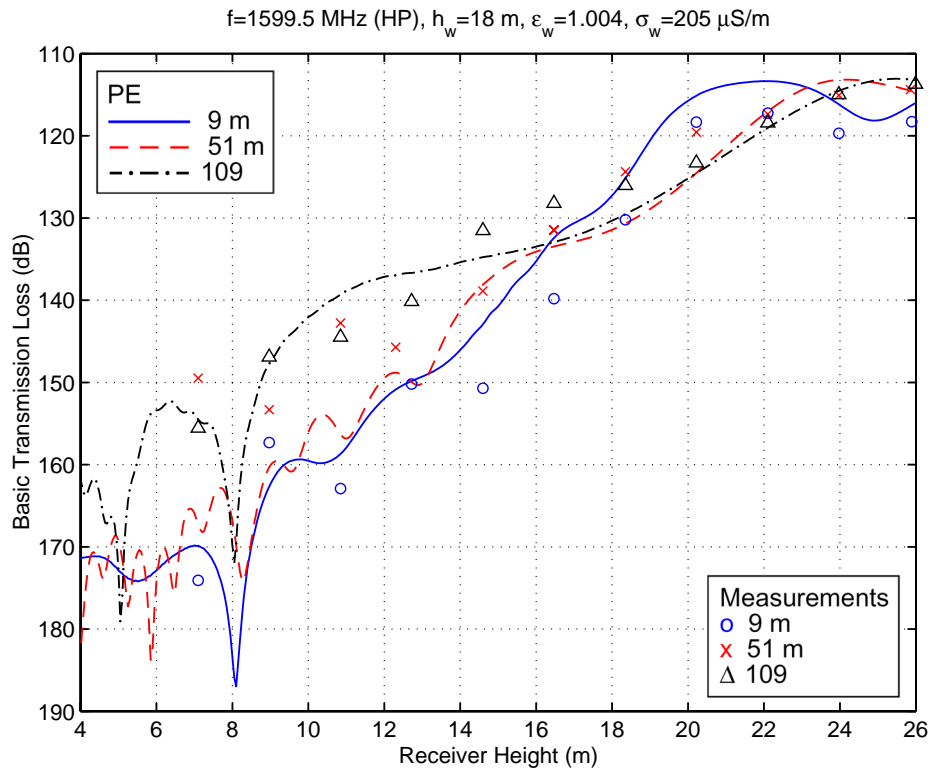
Figur 61. Samma som i figur 59 men för frekvensen 1799.5 MHz och konduktiviteten 225 $\mu\text{S/m}$.

I figur 62-64 visas transmissionsförlust som funktion av mottagarhöjd för frekvenserna 1355.5, 1599.5 och 1799.5 MHz. Varje figur presenterar resultat för avstånden 9, 51 och 109 m från skogskanten. I stora drag överensstämmer uppförandet hos kurvorna för PE-modellen med experimenten i alla tre figurerna. Oscillationerna för de lägre mottagarhöjderna verkar finnas i både PE-beräkningarna och experimenten. Upplösningen i höjddled är tyvärr för låg i experimenten för att man ska kunna bestämma interferensmönstret mer i detalj. Resultaten indikerar dock att det bör gå att modellera vegetation via brytningsindexet i en PE-modell, åtminstone om man kan tilldela vegetationen ett brytningsindex nära ett.

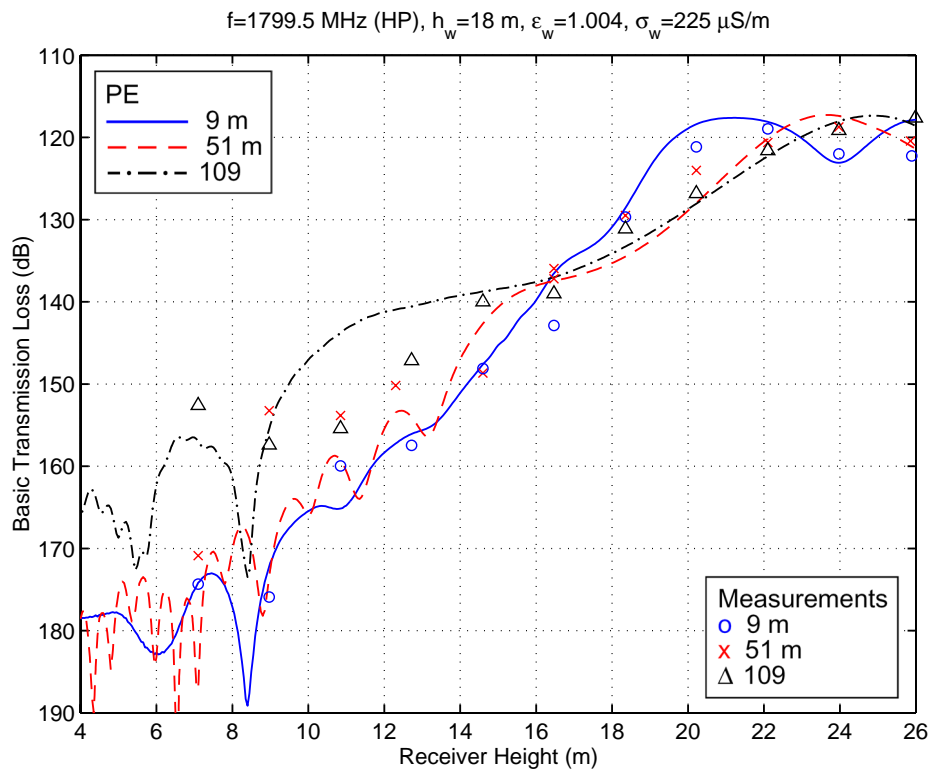
Den något dåliga upplösningen hos experimenten påverkar naturligtvis möjligheten att tilldela skogen bra värden vad det gäller de elektriska parametrarna och i viss mån höjden. Även om höjden på sätt och vis är direkt mätbar är det inte säkert vilken höjd man bör tilldela en skog. Helt klart är att man bör tilldela en granskog en betydligt lägre höjd än den maximala trädtopphöjden, eftersom granar har en topp som smalnar av och blir glattare upptill. Detta är en motivering till den använda höjden 18 m istället för höjden 22 m i figur 57.



Figur 62. Transmissionsförlust som funktion av höjden för frekvensen 1355.5 MHz. Den heldragna, streckade och punktstreckade är för avstånden 9, 51 respektive 109 m från skogskanten. Motsvarande mätningar är markerade med o, × respektive Δ.



Figur 63. Samma som i figur 62 men för frekvensen 1599.5 MHz.



Figur 64. Samma som i figur 62 men för frekvensen 1799.5 MHz.

8 Slutsatser

PE-tekniken är numera en ganska erkänd metod för beräkning av transmissionsförlusten över både plan och kuperad terräng. I denna rapport har vi undersökt möjligheten att ta hänsyn till vegetation såsom skog, både i icke kuperad och kuperad terräng, vilket inte har gjorts tidigare. Den finita differensmetoden för vida vinklar som har tagits fram är vidare helt ny, dvs. har ej publicerats tidigare. I modellen approximeras varje terrängavsnitt täckt av skog med en dielektrisk skiva som följer terrängen. Skivan modelleras sedan genom att variera brytningsindexet i PE-modellen.

För att en PE-modell ska ge tillförlitliga resultat måste brytningsindexet vara relativt nära ett, dvs ett tillförlitligt resultat kan inte förväntas om ett skogsområde måste tilldelas ett index som inte är nära ett. De försök som gjorts med Tamirs skogsmodell pekar dock på värden nära ett, utom i fallet djungel. Värden nära ett verkar också vara det som ger det bästa resultatet för PE-modellen i denna rapport vid jämförelse med experiment. De funna resultaten indikerar att det bör vara möjligt att modellera vegetation såsom skog via brytningsindex i en PE-modell och att man kan tilldela vegetation ett brytningsindex nära ett.

Ett intressant simuleringsresultat är att PE-modellen verkar kunna modellera transmissionsförlusten för frekvenser under 100 MHz på ett riktigt sätt. Experiment har visat att transmissionsförlusten för frekvenser under ca. 100 MHz är betydligt lägre för horisontell än för vertikal polarisation. Detta verkar PE-metoden klara av att modellera, vilket är viktigt. Hur det ska se ut ovanför 100 MHz är lite svårare att säga, eftersom det egentligen inte finns några bra experiment här. Den interferens man kan se i PE-fallet ovanför 100 MHz finns inte i Tamirs modell, men denna tar bara hänsyn till den så kallade lateralvägen som fortplantar sig längs med gränssytan skog-luft. Det finns egentligen inget i simuleringsexemplen som är orimligt. Alla simuleringar sammantaget pekar på ett högst rimligt resultat.

Slutsatsen är således att det bör gå att använda PE-tekniken för att åtminstone ta hand om en del av de effekter som vegetationen kan ha på vågutbredningen. Det man dock skulle kunna göra för att vara mer på den säkra sidan är att undersöka vad som händer i gränssnittet skog-luft. Här bör man kunna ha reflektioner och har man reflektioner har man ett polarisationsberoende. Detta polarisationsberoende modelleras nämligen inte på ett riktigt sätt om skogen bara beskrivs som en variation i brytningsindex, eftersom brytningsindex inte beror på polarisationen.

9 Referenser

- B. Asp, "Vegetation influence on wave propagation," FOA, Linköping, FOA Report B 30097-3.3 (1986).
- A. E. Barrios, "A terrain parabolic equation model for propagation in the troposphere," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-42, no. 1, pp. 90-98, Jan. 1994.
- A. Beilis and F. D. Tappert, "Coupled mode analysis of multiple rough surface scattering," *J. Acoust. Soc Amer.*, vol. 66, pp. 811-826, 1979.
- W. D. Burnside and K. W. Burgener, "High Frequency Scattering by a Thin Lossless Dielectric Slab," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-31, no. 1, pp. 104-110, Jan. 1983.
- D. Dence and T. Tamir, "Radio loss of lateral waves in forest environments," *Radio Sci.*, vol. 4, no. 4, pp. 307-318, April 1969.
- D. J. Donohue and J. R. Kuttler, "Propagation modeling over terrain using the parabolic wave equation," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-48, no. 2, pp. 260-277, Feb. 2000.
- R. S. Gill, "Ground-wave propagation program GRWAVE," Marconi Research Center, Report MTR 85/45 (Version2, 1985).
- P. Holm, G. Eriksson, P. Krans, B. Lundborg, E. Löfsved, U. Sterner och Å. Waern, "Wave propagation over a forest edge – Parabolic equation modeling vs. measurements," *Proc. PIMRC2002*, vol. 1, pp. 140-145, Lisbon, Portugal, September 2002.
- M. Levy, *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation*, IEE, London, UK, 2000.
- D. A. McNamara, C. W. I. Pistorius, and J. A. G. Malherbe, *Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction*, Artech House, Norwood, MA, 1990.
- G. Millington, "Ground-wave propagation over inhomogeneous smooth earth," *Proc. IEE*, vol. 96, pp. 53-64, 1949.
- K. A. Norton, "The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere," Part I, *Proc. Inst. Radio Engineers*, vol. 24, no. 10, pp. 1367-1387, 1936; Part II, *Proc. Inst. Radio Engineers*, vol. 25, no. 9, pp. 1203-1236, 1937.
- J. F. Rouviere, N. Douchin, and P. F. Combes, "Improvement of the UTD Formulation for Diffraction of an Electromagnetic Wave by a Dielectric Wedge," *Electronics Letters*, vol. 33, no. 5, pp. 373-375, Feb. 1997.
- J. F. Rouviere, N. Douchin, and P. F. Combes, "Diffraction by Dielectric Wedges Using Both Heuristic UTD Formulations and FDTD," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-47, no. 11, pp. 471-477, Nov. 1999.
- K. N. Stocke, "Some graphical considerations on Millington's method for calculating field strength over inhomogeneous earth," *Telecommun. J.*, vol. 42, pp. 157-163, 1975.

- T. Tamir, "On radio wave propagation in forest environments," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-15, no. 6, pp. 806-817, Nov. 1967.
- T. Tamir, "Radio wave propagation along mixed paths in forest environment," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-25, no. 4, pp. 471-477, July 1977.
- A. A. Zaporozhets and M. F. Levy, "Bistatic RCS calculations with the vector parabolic equation method," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-47, no.11, pp. 1688–1696, Nov. 1999.
- C. A. Zelay and C. C. Constantinou, "A three-dimensional parabolic equation applied to VHF/UHF propagation over irregular terrain," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-47, no. 10, pp. 1586–1596, Oct. 1999.