

Thomas Kaijser

Om modeller för observation och följning av markmål
baserade på Dolda Markovprocesser och Bayesianska
nät

TOTALFÖRSVARETS FORSKNING SINSTITUT

Avdelningen för Ledningssystem

581 11 Linköping

FOI-R--1192--SE

Mars 2004

ISSN 1650-1942

Vetenskaplig rapport

Thomas Kaijser

Om modeller för observation och följning av markmål baserade på Dolda Markovprocesser och Bayesianiska nät

Utgivare Totalförsvarets Forskningsinstitut - FOI Ledningssystem Box 1165 581 11 Linköping	Rapportnummer, ISRN FOI-R--1192--SE	Klassificering Vetenskaplig rapport
	Forskningsområde 4. Ledning, informationsteknik och sensorer	
	Månad, år Mars 2004	Projektnummer E7779
	Verksamhetsgren 5. Uppdragsfinansierad verksamhet	
	Delområde 41 Ledning med samband och telekom och IT-system	
	Författare/redaktör Thomas Kaijser	
Projektledare Fredrik Lantz		
Godkänd av Martin Rantzer		
Uppdragsgivare/kundbeteckning NFFP3		
Tekniskt och/eller vetenskapligt ansvarig Thomas Kaijser		
Rapportens titel Om modeller för observation och följning av markmål baserade på Dolda Markovprocesser och Bayesianska nät		
Sammanfattning (högst 200 ord) Dolda Markovprocesser och Bayesianska nät är teoriområden inom sannolighetsteorin som fått allt fler praktiska tillämpningsområden det senaste decenniet. I denna rapport ges en allmän beskrivning av hur observation och följning av markmål kan modelleras med hjälp av Dolda Markovprocesser och Bayesianska nät. En viktig egenskap hos Bayesianska nät är att ny information snabbt kan omhändertas och spridas inom nätet. I rapporten presenteras också några konvergensresultat för icke tidshomogena Dolda Markovprocesser, resultat som leder till följande enkla <i>konsensusprincip</i> : "Om två personer betraktar en process via ett observationssystem och personerna är överens om observationssannolikheterna för varje tänkbar tillstånd hos den process som betraktas, kommer deras situationsuppfattning att allt mer överensstämma ju fler observationer som erhålles, oberoende av hur olika situationsuppfattning de hade från början."		
Nyckelord Följning av markmål, Markovkedjemodeller, Dolda Markovprocesser, partiellt observerade Markovkedjor, Bayesianska filter, Bayesianska nät, dynamiska Bayesianska nät.		
Övriga bibliografiska uppgifter	Språk Svenska	
ISSN 1650-1942	Antal sidor: 53 s.	
Distribution enligt missiv	Pris: Enligt prislista	

Issuing organization FOI – Swedish Defence Research Agency Command & Control P. O. Box 1165 SE-581 11 Linköping SWEDEN	Report number, ISRN FOI-R--1192--SE	Report type Scientific report
	Programme Areas 4. C4ISTAR	
	Month year March 2004	Project no. E7779
	General Research Areas 5. Commissioned Research	
	Subcategories 41 C4I	
Author/s (editor/s) Thomas Kaijser	Project manager Thomas Kaijser	
	Approved by Martin Rantzer	
	Sponsoring agency NFFP 3	
	Scientifically and technically responsible Thomas Kaijser	
Report title (In translation) On models of observing and tracking ground targets based on Hidden Markov Processes and Bayesian networks		
Abstract (not more than 200 words) Hidden Markov Processes and Bayesian nets are areas within probability theory which have found many practical applications within the last decade. In this report a general description is given of how the tracking of ground targets can be modelled as Hidden Markov processes and Bayesian nets. An important property of Bayesian nets is that new information can be handled rapidly and spread quickly within the net. In the report some convergence results for Hidden Markov processes are presented and proven, results which lead to the following simple <i>consensus principle</i> : "If two persons are watching a process through an observation system and they agree upon the observation probabilities for every possible state of the process, then their opinions of the state of the process will converge, as more and more observations are obtained, irrespectively of how different their initial opinions of the state of the process may have been."		
Keywords Tracking of ground targets, Markov chain models, hidden Markov processes, partially observed Markov chains, Bayesian filters, Bayesian networks, dynamic Bayesian networks, Hidden Markov chains.		
Further bibliographic information	Language Swedish	
ISSN 1650-1942	Pages 53 p.	
	Price acc. to pricelist	

Innehållsförteckning.

1. Inledning.	5
2. Rörelsemodeller. Ett objekt.	7
3. Rörelsemodeller. Flera objekt.	10
4. Observationssystem.	11
5. Dolda Markovprocesser.	13
6. Dolda Markovprocesser med flera observationssystem.	18
7. Dolda Markovprocesser och Bayesianska nät.	23
8. Analys med hjälp av Bayesianska nät.	28
9. Dolda Markovprocesser med aktionssystem.	29
10. Dolda Markovprocesser och Kalmanfilter.	32
11. Appendix 1	36
12. Appendix 2.	43
Referenser.	52

1 Inledning.

Teknik och metoder som visat sig fungera väl för målföljning av luftburna objekt kan inte utan vidare användas vid målföljning av markmål. Några viktiga skillnader är bl.a. följande. Markmiljön är ofta oregelbunden och kan förändras snabbt. Många typer av objekt som rör sig i markmiljö kan snabbt ändra fart och riktning. Objekt kan ofta utnyttja miljön för att försvåra sensorregistreringsmöjligheterna.

I uppsatsen [11] analyserar författarna två olika tekniker för markmålföljning, nämligen dels en teknik som grundar sig på Kalmanfilterteori i kombination med så kallad interaktiv multipelmodellering (IMM), dels en teknik som grundar sig på teorin för så kallade Hidden Markov Models, en klass av modeller som på svenska oftast kallas för Dolda Markovmodeller (DM-modeller). De slutsatser som dras är att DM-modeller är mer beräkningskrävande än Kalmanfilterteoribaserade modeller men att å andra sidan DM-modeller på ett smidigare sätt kan inkludera terrängegenskaper, objektgenskaper och även taktik och doktriner. Författarna finner att Kalmanfilterteoribaserade modeller är effektiva och robusta och antyder att de resultat som de erhållit kan förbättras genom att vägegenskaper inkluderas i modellen, men, skriver de, för att avgöra hur detta ska göras krävs fortsatta studier.

I uppsatsen [1] görs också jämförelser mellan Kalmanfilterteoribaserade modeller och DM-modeller. Dessutom görs en simulering baserad på en DM-modell. I simuleringsmodellen finns en karta, ett vägnät i kartan, en Markovkedjemodell för ett objekts rörelse, en stokastisk modell för att beskriva sensorobservationerna och också en stokastisk modell för att generera falskmål. Den DM-modell som härigenom uppstår har sen implementerats och i detta ganska enkla exempel gett ett gott simuleringsresultat.

Syftet med denna rapport är tvåfaldigt. Det första syftet är att ge en generell beskrivning av hur 1) markmålens rörelser kan beskrivas med hjälp av Markovprocesser, och 2) hur observationssystemen (ett eller flera) och deras observationer tillsammans med markmålens rörelser kan beskrivas med hjälp av Dolda Markovprocesser. Det andra syftet är att påvisa hur markmålföljningsmodeller baserade på Dolda Markovprocesser också kan beskrivas med hjälp av Bayesianska nät.

Förhoppningen är att den allmänna beskrivning som görs i rapporten ska skapa överblick, tydliggöra samspelet mellan olika delar i en markmålföljningsmodell och underlätta analys av vad olika antaganden, förenklingar och approximationer får för konsekvenser. Tanken bakom att påvisa sambandet med Bayesianska nät är att det ska tydliggöra möjligheterna att använda andra rörelsemodeller och observationssystemmodeller än de som grundas på normalfördelningsantaganden, eller likformighetsantaganden, vilket är vanligt inom Kalmanfilterteorin och partikel-filterteorin.

Den allmänna beskrivning av markmålföljning som presenteras i denna rapport är i sina huvuddrag inte ny. Exempelvis finns en likartad beskrivning i [7],

Kap 10.

I korthet består vår modellbeskrivning av 1) en Markovprocess (Markovkedja) som beskriver hur ett eller flera objekt rör sig, 2) sannolikhetsmatriser för att beskriva hur observationerna beror på markmålens tillstånd (position, hastighet, mm) 3) en sannolikhetsfunktion som bestämmer vilket observationssystem vi ska använda, om vi har flera att välja emellan, när vi ska använda ett observationssystem, och var vi ska placera det, 4) en sannolikhetsfunktion för att bestämma valet av aktionssystem samt 5) en sannolikhetsfunktion för hur aktionssystemen påverkar objekten.

Som nämnts ovan visar vi i rapporten det välkända faktumet att en modell grundad på en Dold Markovprocess kan beskrivas som ett Bayesianiskt nät. Teorin för Bayesianiska nät har utvecklats under 90-talet och har möjliggjort modellering av system med komplexa orsakssamband, beroende på det faktum att beräkningstiden för uppdatering och "omsättning" av ny information i även komplexa system kan ske på relativt kort tid.

Uppläggningsen av rapporten är följande. I avsnitt 2 beskriver vi en generell Markovprocessmodell för *ett* rörligt objekt, och i avsnitt 3 generaliserar vi modellen till den situation då vi har *flera samverkande* rörliga objekt.

I avsnitt 4 diskuterar vi observationssystem på ett allmänt plan och visar med hjälp av Bayes sats en enkel formel för hur en sannolikhetsfördelning som beskriver tillståndet hos en Markovprocess vid ett visst ögonblick kan uppdateras efter att en observation har erhållits.

I avsnitt 5 presenterar vi en klass av stokastiska processer som kallas för Dolda Markovprocesser. Helt kort uttryckt består en Dold Markovprocess dels av en Markovprocess, dels av ett observationssystem. I avsnitt 5 formulerar vi också några matematiska påståenden rörande konvergens av sannolikhetsfördelningar. En konsekvens av dessa matematiska resultat är att om två personer betraktar samma process, och initialt har *olika* situationsuppfattningar, men är överens om sannolikheten för att erhålla en viss observation givet en viss situation, så kommer deras situationsuppfattning att alltmer överensstämma allteftersom nya observationer erhålles. Vi kallar detta *konsensusprincipen*.

I avsnitt 6 presenterar vi en klass av processer som vi kallar för "Dolda Markovprocesser med flera observationssystem". Vi inför också en valfunktion som styr vilket observationssystem som väljs vid olika tidpunkter.

I avsnitt 7 inför vi begreppet Bayesianiskt nät och visar hur såväl den vanliga Dolda Markovprocessen (ett observationssystem), som den Dolda Markovprocessen med flera observationssystem kan beskrivas som ett Bayesianiskt nät. Fördelen med att använda Bayesianiska nät för modellering är att ny information om den process som studeras snabbt kan distribueras i nätet. Bayesianiska nät är - i princip - beräkningsvänliga, och det finns flera mjukvarusystem för Bayesianiska nät. I avsnitt 8 diskuteras helt kort möjligheterna att med hjälp av Bayesianiska nät

bestämma maximumsannolikheter för fördelningsfunktioner som omfattar flera tidssteg.

I avsnitt 9 utvidgar vi vår beskrivning av markmålföljning ytterligare. Förutom de tidigare införda observationssystemen inför vi nu även aktionssystem med vars hjälp vi kan påverka markfordonens rörelse och överlevnad. Dessutom inför vi en persons omvärldsuppfattning som en storhet som påverkar olika valfunktioner. Vidare inför vi väder och miljödata, som en tillståndsvariabel i modellen, varigenom vi kan tydliggöra ett observationssystemets beroende av vädersituationen. Slutligen inför vi i avsnitt 9 även möjligheten att erhålla extern information om markfordonens rörelse. Extern observation kan ses som ett observationssystem som vi inte kontrollerar. Vi avslutar avsnitt 9 med att även beskriva denna generaliserade modell som ett Bayesianskt nät.

I avsnitt 10 betraktar vi en enkel modell inom Kalmanfilterteorin och påvisar med hjälp av detta enkla exempel sambandet mellan Kalmanfilterteoribaserade modeller, Dolda Markovprocesser och Bayesianska nät.

Vi avslutar uppsatsen med två Appendix i vilka vi bevisar de två konvergenssatserna som vi formulerat i avsnitt 5. Bevisen bygger i allt väsentligt på bevisen i uppsatsen [9].

Denna rapport utgör en del av ett projekt benämnt NFFP3-427, finansierat av Nationella Flygtekniska Forskningsprogrammet och Försvarets Materielverk, ett projekt som drivits i samarbete med Saab Aerospace.

Jag vill tacka Fil.Mag. Fredrik Lantz och Tekn.Dr. Per Svensson för många värdefulla synpunkter.

Addendum. Under redigeringsarbetet med denna rapport fick jag kännedom om boken [3]. Denna bok handlar till stor del om så kallade partikelfilter, ett område som vi knappt berört i denna rapport. I boken [3] finns dessutom två uppsatser ([12], [13]) som diskuterar Bayesianska nät, och det finns ett visst överlapp mellan dessa två uppsatser och vår rapport.

2 Rörelsemodeller. Ett objekt.

Syftet med detta avsnitt är att beskriva en enkel modell för rörelsen hos ett markbundet objekt - exempelvis ett fordon.

Vi tänker oss ett markbundet objekt som givet, t.ex personbil, terränggående hjulfordon, bandvagn, etc. Vilken *typ* av objekt vi betraktar antas alltså vara känt.

Vi betraktar ett geografiskt område. Första delen i modellen är att välja hur vi ska representera objektets läge - dess position. Det är flera faktorer som styr detta

val. T.ex observationernas precision, takten med vilken observationer erhålles, typ av digital representation av karta, mm.

I allmänhet använder vi alla tre rumskoordinaterna x , y och z för att ange ett föremåls position.

Ett vanligt angreppssätt är att göra en indelning av det geografiska området i mindre delområden. Efter att man gjort den geografiska indelningen låter man en punkt i varje delområde vara en representant för delområdet, och man modellerar ett föremåls rörelse på så sätt att när ett föremål förflyttar sig från ett delområde till ett annat, så modelleras detta på så sätt att föremålet rör sig från en representantpunkt till en annan. Man kan också tänka sig att modellera positionen på så sätt att när ett föremål befinner sig inom ett delområde så antas läget hos föremålet vara likformigt fördelat inom området.

Det finns således flera sätt man kan tänka sig att göra positionsmodelleringen på. Tills vidare tänker vi oss dock att den görs så att tillståndsmängden för ett föremåls position kan beskrivas med en ändlig mängd.

Förutom en position behöver vi, för att beskriva ett objekts rörelse, också ange dess hastighet. Vi tolkar begreppet hastighet som en vektor. Storleken på denna vektor kallar vi för fart, dess riktning för hastighetsriktning eller bara riktning.

Vi låter $\{v_i, i = 1, 2, \dots, N_v\}$ utgöra en indelning längs fartaxeln, och vi låter $\{w_i, i = 1, 2, \dots, N_w\}$ utgöra en indelning av möjliga riktningar (i två dimensioner).

Vilken indelning av fartaxeln och riktningens mängd som behöver göras beror också till stor del på informationstakten. Som en första grov ansats kanske fyra farter och åtta riktningar räcker.

För att få en ännu exaktare beskrivning av rörelsen kan man tänka sig att även använda accelerationen. För enkelhets skull utelämnar vi accelerationen i vår grundmodell, men om observationssystemen ger bra accelerationsbestämningar så är det inte svårt att tillfoga accelerationen som ytterligare en tillståndskomponent.

För att beskriva ett objekts tillstånd använder vi således tre tal, en så kallad trippel (i, v, w) , där i anger det delområde i terrängen (kartan) som omfattar den plats där objektet befinner sig, v anger farten hos objektet (t.ex stillastående, låg, medel eller hög), och w anger en approximativ riktning (t.ex Syd, Väst, Nord, Ost, SydOst, SydVäst, NordVäst eller NordOst), eller en viss riktning på en väg.

Nästa steg i modellutvecklingen är att bestämma övergångssannolikheter mellan objektets olika tänkbara tillstånd. Bestämningen av dessa sannolikheter i modellen styrs av bland annat objekttyp, terrängtyp, och med vilken takt som information erhålles. Eftersom tidsmellanrummet mellan två informationsinhämtningar kan variera är det lämpligt att i modellen låta alla övergångssannolikheter vara en funktion av tiden.

Det är viktigt att påpeka att många av övergångssannolikheterna ofta kan väljas till noll beroende på att ett objekt har begränsad fart, begränsad bromsnings-

förmåga, begränsad framkomlighet i viss terrängtyp mm. Härigenom kan beräkningstiden för skattning av föremålets tillstånd ofta förkortas kraftigt.

En intressant teknik för att modellera rörelsen hos ett föremål då man måste ta hänsyn till terrängen är följande. Vi tänker oss att information om terrängen fås med hjälp av en digital karta. Vi skapar nu först en grov modell för rörelsen på följande sätt:

Antag att ett föremål befinner sig vid platsen P vid tidpunkten t_0 och har en hastighetsvektor \bar{u} . Vår initiala prediktion av föremålets läge och hastighet vid tidpunkten t_1 sker med hjälp av en normalfördelning med medelvärde i en punkt belägen på avståndet $|t_1 - t_0| \cdot |\bar{u}|$ i riktningen \bar{u} , och med en varians $|t_1 - t_0|\sigma$ med något lämpligt valt σ .

Därefter görs ett stort antal MonteCarlo-simuleringar baserade på denna grova rörelsemodell. Utfallen av Monte-Carlo-simuleringarna kan uppfattas som ett statistiskt sample för den modell vi startat med.

Vi gör nu en omsampling av det erhållna samplet med hjälp av kartinformationen och vår kunskap om föremålets möjligheter att förflytta sig i olika typer av terräng. Denna omsampling går helt enkelt till så att först erhåller varje element i det erhållna samplet en vikt beroende på kartinformationen. För en personbil kan kartvikterna t.ex vara .95 för väg, .10 för öppen terräng, .05 för stig, .05 för betäckt terräng, .0 för sankmark. Och för bandfordon kan motsvarande vikter vara .5 för väg, .45 för öppen terräng, .05 för betäckt terräng, .0 för sankmark.

Efter att man tillordnat en vikt till varje element i samplet så sker en omsampling på så sätt att man först ger alla elementen en sannolikhetsvikt som beräknas helt enkelt genom att kartvikten för elementet divideras med summan av alla elementens kartvikter, och därefter "tar man" ett stokastiskt utfall från en multinomial fördelning $M(n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ varvid n anger antalet element i samplet och p_1, p_2, \dots, p_n är de sannolikhetsvikter som beräknats med hjälp av kartvikterna. Det som sker i samband med omsamlingen är att många av de utfall som hamnade i områden med låg kartvikt elimineras medan element som erhållit relativt höga kartvärden mångfaldigas.

Det sample som erhålles efter omsampling kan sen användas som grund för en fördelningsfunktion för föremålets nya position efter t tidsenheter.

Fördelen med den nyss beskrivna tekniken för rörelsemodellering är att den är enkel att implementera, relativt snabb och kan hantera ganska komplicerade rörelsebegränsande hinder.

(För mer information om - och exempel på - denna teknik se t.ex [14] med referenser.)

Den sista komponenten i modelleringen utgörs av bestämningen av sannolikhetsfördelningen för objektets initiala tillstånd. En första modellansats är att anta likformig fördelning över tillståndsrummet.

3 Rörelsemodeller. Flera objekt.

I föregående avsnitt skisserade vi en rörelsemodell för *ett* markmål. I detta avsnitt skall vi kort diskutera modeller för flera markmål.

I uppsatsen [1] (kap 6) ges ett exempel på en modellering av två objekt som rör sig oberoende av varandra. Den modell som författarna valt är helt enkelt en Markovkedjemodell för det ena fordonet, och en annan, oberoende, Markovkedjemodell för det andra fordonet. Om i verkligheten det är naturligt att tänka sig att objekten rör sig oberoende av varandra så är det naturligtvis också naturligt att låta den stokastiska modellen bestå av två - stokastiskt oberoende - komponenter.

Den problematik som diskuteras och analyseras i kap 6 i uppsatsen [1] är associeringsproblem i samband med vägkorsningar. Om två föremål möter varandra i en korsning kan det vara svårt att veta vilket föremål som fortsätter längs den ena respektive andra vägsträckningen.

Associeringsproblem är ett viktigt och svårt problemområde vid målföljning av flera föremål i luften, och är viktigt även vid markmålföljning.

För att modellera grupper av markföremål, där föremålens rörelse sker i samverkan, kan detta utan principiella problem också göras med hjälp av en Markovkedjemodell.

När vi beskrev en modell för ett objekt så antog vi implicit att vi kände alla de karaktäristikor hos ett objekt som är nödvändiga för att modellera dess rörelse. När vi nu ska modellera en grupp av objekt så börjar vi med att identifiera alla tänkbara klasser som ett objekt kan tillhöra. Dessutom fogar vi till modellen en klass som innehåller okända typer av objekt.

Vi tänker oss alltså att ett objekt kan tillhöra en av flera möjliga klasser och för varje klass av objekt har vi en rörelsemodell för ett objekt i denna klass.

Tillståndsrummet för vår Markovkedjemodell kommer således att bestå av ett antal vektorer, var och en av vektorerna består av fyra komponenter, som beskriver respektive, ett objekts geografiska läge, ett objekts fart, ett objekts riktning, och ett objekts klasstillhörighet.

Vi tänker oss vidare att tillståndsrummet är *flexibelt* i den meningen att vi förutom de objekt vi har identifierat - säg att de är L stycken - dessutom tillåter att antalet objekt ökar eller minskar. En komponent i tillståndsrummet får därför ange antalet objekt i området, och en annan komponent får ange antalet icke upptäckta objekt. Sannolikheten för t.ex. händelsen att det finns ytterligare objekt i området som man inte upptäckt kan uppskattas med hjälp av den kunskap man har om de observationssystem man använder. Likaså, om observationssystemen kan registrera falskmål, så finns det en viss sannolikhet för att några av observationerna hör till sådana falskmål. Dessa möjligheter bör helst kunna hanteras i modellen.

Problemen som uppstår på grund av observationsbortfall och falskmål är svåra att hantera. I [6] (se även [7], kap 14) finns en teori utvecklad för att bemästra

dessa problem, men min bedömning är att problemen kan lösas inom ramen för klassisk sannolikhetsteori.

När man ska bestämma övergångssannolikheterna för Markovkedjemo- dellén måste man, förutom att analysera de individuella egenskaperna hos objekten, även noggrant analysera samspelet mellan de olika markobjektens rörelse. Man måste vidare ta hänsyn till terrängegenskaper, och dessutom vädersituationen och eventuellt andra externa faktorer.

Det är en besvärlig och komplicerad analys som måste göras även för att er- hålla en rimlig grad av realism. Av detta skäl har man emellanåt gjort följande intressanta ansats, som exempelvis finns beskriven i [7], kap 9.

I stället för att försöka modellera beroendet med hjälp av en övergångsmatris - en matris vars storlek växer kvadratisk med avseende på antalet fordon, så antar man att rörelsen för föremålen sker oberoende av varandra, men man lägger på den restriktionen att varje observation hör till exakt ett föremål.

Fördelen med denna ansats är att övergångsmatrisens storlek växer linjärt med avseende på antalet objekt och inte kvadratisk. Bivillkoret, att varje observation endast hör till ett föremål, leder dock till ett besvärligt optimeringsproblem vars lösningstid växer exponentiellt med antalet objekt. Det finns emellertid approx- imativa lösningsmetoder, och enligt [7] kap 9, har empiriska studier gett goda resultat.

Efter att övergångssannolikheterna har bestämts måste slutligen den initiala sannolikhetsfördelningen bestämmas. Den görs på basis av den lägesbild man har vid starttidpunkten. Alternativt kan man, som initialfördelning, välja en fördel- ning som grundar sig på den första observationen, eller helt enkelt anta likformig fördelning över tillståndsrummet.

4 Observationssystem.

I detta avsnitt skall vi belysa hur man kan modellera observationer av skeenden.

Skeendet som vi studerar är t.ex förflyttningen hos en grupp markfordon. Ske- endet tänker vi oss beskrivet med hjälp av fyra komponenter: en positionskompo- nent, en fartkomponent, en riktningsskomponent och en typkomponent (klasskom- ponent). Varje komponent utgörs i sin tur av en vektor, varvid varje komponent i vektorn representerar ett objekt. Vi betecknar oftast ett generiskt tillstånd i till- ståndsrummet med x , x_1 , x_2 , etcetera.

Skeendet observeras nu av ett observationssystem. Detta system genererar ob- servationer vid olika tidpunkter, t_0 , t_1 , t_2 , o s v. Mängden möjliga observationer, kallar vi observationsrummet och det betecknar vi A , och de olika observationerna betecknar vi med a , b , c , ... osv.

Ett observationssystem är ofta lämpligt att modellera som en stokastisk modell

av bl.a. följande skäl. Antag att det sanna tillståndet för det vi observerar är x . Den observation a , säg, som vi då erhåller beror, för så gott som alla observationssystem, på en mängd parametrar förutom tillståndet x . Sambandet mellan olika parametervärden och observationsvärden är ofta svårt att fastställa exakt och därför väljer man ofta att beskriva sambandet med en stokastisk modell. Dessutom, även i de situationer då man har en mycket exakt uppfattning av hur de viktigaste parametrarna påverkar observationsvärdet, så finns sällan (aldrig) mätmetoder som möjliggör en exakt bestämning av tillståndet hos det vi observerar.

Allt detta gör att det i många sammanhang är naturligt att göra en *stokastisk modell* av observationssystemet på följande enkla sätt.

Vi betraktar således en observation som en stokastisk storhet som kan anta värden i ett observationsrum A . Den fördelning som hör till den stokastiska storheten antar vi beror på tillståndet hos den process vi studerar och eventuellt på tidpunkten när observationen görs. Om vi nu antar att observationsrummet är en ändlig mängd A och att också processens tillståndsmängd K också är en ändlig mängd kan sannolikhetsfunktionen som beskriver fördelningen för observationen givet att processen befann sig i tillståndet x skrivas $q(x, a)$, och det observationssystem som vi använder vid denna tidpunkt kan modelleras som en matris

$$\{q(x, a), x \in K, a \in A\}.$$

Om vi modellerar vår uppfattning om tillståndet hos den process vi följer med hjälp av en sannolikhetsfördelning, är det lätt att matematiskt beskriva hur vår uppfattning förändras med hjälp av den matrismodell vi formulerat för vårt observationssystem.

Antag således att vår uppfattning om tillståndet hos den process vi studerar vid tiden t_0 modelleras med hjälp av en sannolikhetsfördelning p_0 . Antag nu att vi vid tidpunkten t_0 erhåller en observation a och att den matris som beskriver vårt observationssystem är $\{q(x, a), x \in K, a \in A\}$.

Efter det att vi erhållit observationen så förändras vår uppfattning om tillståndet hos den process vi följer. Den information som observationen tillför kan återkopplas på så sätt att vi erhåller en ny sannolikhetsfördelning efter observationen, en så kallad aposteriorifördelning, som vi betecknar \hat{p}_0 som kan erhållas med hjälp av Bayes sats, och som kan ses som en modellering av vår nya uppfattning om tillståndet efter det att vi erhållit ny information.

I det fall såväl tillståndsrumsrummet som observationsrummet har ett uppräknligt antal element blir formalismen följande:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0(x) &= Pr[X = x|Y = a] = Pr[X = x, Y = a]/Pr[Y = a] = \\ &= p_0(x) \cdot q(x, a) / \sum_y p_0(y) \cdot q(y, a). \end{aligned} \quad (1)$$

I ovanstående formel betecknar X en stokastisk variabel med fördelningen $p_0(x)$.

Den här formeln kan ges en ännu kompaktare framställning om vi inför några ytterligare beteckningar.

Låt $Q_a = \{Q_a(x, y), x \in K, y \in K\}$ vara en diagonalmatris sådan att diagonalelementen satisfierar $Q_a(x, x) = q(x, a)$, $x \in K$. Om $\bar{v} = \{v(x), x \in K\}$ betecknar en vektor med lika många komponenter som antalet element i tillståndsrummet K så definierar vi $\|\bar{v}\| = \sum_x |v(x)|$.

Aposteriorifördelningen \hat{p}_0 givet observationen a , kan nu skrivas på följande mycket kompakta sätt om vi uppfattar p_0 som en radvektor.

$$\hat{p}_0 = p_0 Q_a / \|p_0 Q_a\|. \quad (2)$$

Att formel (2) utgör en korrekt omskrivning av (1) visas lätt. Vi finner nämligen att sannolikheten för att X ska anta värdet x och dessutom att observationen ska vara a är

$$p_0(x)q(x, a) = \sum_{y \in K} p_0(y)Q_a(y, x) = p_0 Q_a(\cdot, x)$$

där $Q_a(\cdot, x)$ anger x :e kolumnvektorn hos matrisen Q_a , eftersom $Q_a(x, y) = 0$ då $x \neq y$. Härmed har vi bekräftat uttrycket i täljaren i formel (2).

På liknande sätt finner vi att sannolikheten för att erhålla observationen a är

$$\sum_{y \in K} p_0(y) \cdot q(y, a) = \sum_{y \in K} p_0(y) \sum_{x \in K} Q_a(x, y) = \|p_0 Q_a\|.$$

Härmed är uttrycket i nämnaren i formel (2) också bekräftat.

Den här formalismen kommer att visa sig mycket ändamålsenlig som vi ska konstatera nedan.

5 Dolda Markovprocesser.

Dolda Markovprocesser är en klass av stokastiska system, som dels består av en Markovprocess (Markovkedja), dels består av en observationsprocess. Observationsprocessen består av observationer av Markovprocessen och har den egenskapen att varje observation endast beror på tillståndet hos Markovprocessen vid observationstillfället och inte på tidigare tillstånd eller tidigare observationer.

Inom sannolikheteorin har Dolda Markovprocesser studerats sen åtminstone tidigt 60-tal. Den vanliga benämningen före 1980 var *partiellt observerade Markovkedjor*. Den vanligaste benämningen idag är förmodligen *Dolda Markovmodeller*. I denna uppsats har vi i likhet med författarna till uppsatsen [4] valt

benämningen Dolda Markovprocesser när vi diskuterar den här typen av processer i generella termer.

Till en Dold Markovprocess hör således två stokastiska processer, en Markovprocess och en observationsprocess. För att underlätta framställningen antar vi i resten av detta avsnitt att tillståndsmängden K för Markovprocessen är en nummerbar mängd, och att tillståndsmängden A för observationsprocessen också är nummerbar. Denna senare mängd kallar vi observationsrummet.

Markovprocessen, som vi betecknar $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$, tänker vi oss som startande vid tiden t_0 , och vi betecknar i allmänhet initialfördelningen för $X(t_0)$ med p_0 .

Tidpunkterna för observationerna betecknar vi t_1, t_2, \dots , där det således gäller att $t_i > t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$. Vi betecknar observationerna som erhålles vid dessa tidpunkter Y_1, Y_2, \dots , och vi betecknar tillståndet för Markovprocessen vid tidpunkterna t_0, t_1, t_2, \dots antingen $X(t_0), X(t_1), X(t_2), \dots$ eller helt enkelt X_0, X_1, X_2, \dots .

Den allmänna övergångssannolikhetsfunktionen för Markovprocessen betecknar vi $p(x, y; s, t)$ som alltså står för sannolikheten

$$Pr[X(t) = y | X(s) = x].$$

Matrisen

$$\{p(x_1, x_2; t_0, t_1); x_1 \in K, x_2 \in K\}$$

betecknar vi P_1 och mer allmänt betecknar vi matriserna

$$\{p(x_1, x_2; t_{n-1}, t_n); x_1 \in K, x_2 \in K\}$$

$n = 2, 3, \dots$ med P_n . Om alla P_n , $n = 1, 2, \dots$ är lika använder vi den gemensamma beteckningen P .

På liknande sätt betecknar vi den allmänna övergångssannolikhetsfunktionen som bestämmer sannolikhetsfördelningen för observationerna vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots med $q(x, a; t_n)$, $n = 1, 2, \dots$ som alltså betecknar

$$Pr[Y(t_n) = a | X(t_n) = x], \quad n = 1, 2, \dots$$

Matrisen

$$\{q(x, a; t_n), x \in K, a \in A\}$$

betecknar vi Q_n .

Vi betecknar diagonalmatriserna som vi införde i föregående avsnitt med $Q_{n,a}$, $n = 1, 2, \dots$, $a \in A$ som alltså definieras sålunda att $Q_{n,a}(x, y) = 0$, om $x, y \in K$, $x \neq y$ och $Q_{n,a}(x, x) = q(x, a; t_n)$ om $x \in K$.

Som nyss nämnts låter vi p_0 beteckna sannolikhetsfördelningen för $X(t_0)$. Vi låter $\hat{p}_n, n = 1, 2, \dots$ beteckna fördelningen för $X(t_n)$ omedelbart efter den n :e observationen erhållits, och om vi vill betona att de n första observationerna som erhållits är a_1, a_2, \dots, a_n skriver vi $\hat{p}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Följande formler är välkända även om de vanligen inte formuleras på nedanstående enkla sätt.

$$Pr[Y_1 = a_1, \dots, Y_N = a_N] = \prod_{i=1}^N p_0 P_i Q_{i, a_i} \quad (3)$$

och

$$\begin{aligned} \hat{p}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \\ \hat{p}_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) P_N Q_{N, a_N} / \prod_{i=1}^{n-1} \hat{p}_i(a_1, a_2, \dots, a_i) P_i Q_{i, a_i} &= \\ p_0 P_1 Q_{1, a_1} \dots P_N Q_{N, a_N} / \prod_{i=1}^N p_0 P_i Q_{i, a_i} &. \end{aligned} \quad (4)$$

Anmärkning. Det är för att förenkla en del formler och bevis vi valt att starta den underliggande Markovprocessen $\{X(t), t \geq t_0\}$ vid en tidpunkt som ligger före den första observationstidpunkten t_1 . Detta tekniska grepp ger något större symmetri i formlerna.

Vi ska nu strax formulera två teorem vars riktighet grundar sig på resultat som bevisades i uppsatsen [9].

Först definierar vi ett begrepp som infördes i uppsatsen [9].

Definition 5.1 En matris $M = \{m_{i,j}\}$ med ickenegativa element sägs vara **subrektangulär** om det gäller att om två element m_{i_1, j_1} och m_{i_2, j_2} i matrisen som varken ligger i samma rad (dvs $i_1 \neq i_2$) eller i samma kolumn (dvs $j_1 \neq j_2$) båda är positiva, så följer att även elementen m_{i_1, j_2} och m_{i_2, j_1} är positiva.

Löst uttryckt betyder begreppet subrektangulär att de positiva elementen i en ickenegativ matris bildar ett regelbundet, rektangulärt mönster.

Viktiga egenskaper för subrektangulära matriser är följande två, som är mycket lätta att bevisa. Vi utelämnar bevisen.

Lemma 5.1 Antag att M_1 och M_2 är två ickenegativa $d \times d$ -matriser och att M_1 är subrektangulär. Då gäller att även matriserna $M_1 M_2$ och $M_2 M_1$ är subrektangulära.

Innan vi formulerar första satsen ska vi införa följande villkor:

Villkor 5.1 *Det finns ett heltal m_0 och ett positivt tal κ så att följande gäller: För varje tillstånd i och varje tidpunkt t_n så gäller att för varje tidsföljd $t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+m_0}$ och varje följd a_1, a_2, \dots, a_m av tänkbara observationer så är matrisen $P_{n+1}Q_{n+1,a_1}P_{n+2}Q_{n+2,a_2}\dots P_{n+m_0}Q_{n+m_0,a_{m_0}}$ en ickenegativ, subrektangulär matris sådan att värdet på det minsta positiva elementet i matrisen är $\geq \kappa$.*

Villkoret 5.1 kan förefalla som ett ganska starkt villkor men i själva verket är det ett svagt villkor som delvis torde framgå av egenskaperna i Lemma 5.1. Dessa egenskaper medför nämligen att om en produkt av ickenegativa matriser är subrektangulär så bevaras denna egenskap vid multiplikation från såväl vänster som höger av ickenegativa matriser. Man kan säga att ju fler matrismultiplikationer som görs ju osannolikare är det att matrisprodukten *ej* är subrektangulär.

Den första satsen lyder som följer:

Teorem 5.1 *Betrakta en Dold Markovprocess med ändligt tillståndsrum och ändligt observationsrum och antag att Villkor 5.1 gäller. Låt λ beteckna den likformiga fördelningen över tillståndsrummet, låt $\hat{\lambda}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ beteckna den betingade fördelningen för den underliggande Markovprocessen vid tiden t_n givet att initialfördelningen var λ och att man erhållit observationerna a_1, \dots, a_n vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots, t_n , och låt på motsvarande sätt $\hat{p}_n(a_1, \dots, a_n)$ beteckna den betingade fördelningen för den underliggande Markovprocessen givet att initialfördelningen var p_0 i stället för λ , och då man återigen erhållit observationerna a_1, a_2, \dots, a_n vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots, t_n .*

Då gäller, att det finns konstanter C och ρ oberoende av n så att för $n = 1, 2, \dots$ gäller att

$$\|\hat{p}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) - \hat{\lambda}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)\| \leq C \cdot \rho^n \quad (5)$$

varvid ρ är < 1 .

Ett bevis av denna sats finns i Appendix 1.

Anmärkning. Vad detta teorem säger är att om man antar att fördelningen för Markovprocessen vid starttidpunkten t_0 är den likformiga fördelningen, så kommer felet, i den med hjälp av observationerna framräknade betingade fördelningen, orsakat av startantagandet, snabbt att avta mot noll då antalet observationer växer.

Före nästa sats behöver vi införa begreppen *odelbar* och *stabil*.

Definition 5.2 *En Markovkedja $\{X_0, X_1, \dots, X_n, \dots\}$, ej nödvändigtvis tidshomogen, med numrerbart tillståndsrum K sägs vara **odelbar** om det finns ett tillstånd $i_0 \in K$ och ett heltal n_0 så att $Pr[X_{n+j} = i_0 | X_j = i] > 0$ om $n > n_0$ för alla $j \geq 0$ och alla tillstånd $i \in K$.*

Definition 5.3 En, ej nödvändigtvis tidshomogen, Markovkedja $\{X_0, X_1, \dots, X_n, \dots\}$ med ändligt tillståndsrum och med övergångsmatriser P_1, P_2, \dots sägs vara **stabil** om

$$\inf_{n \geq 1} \{ \inf \{ P_n(i, j) : P_n(i, j) > 0 \} \} > 0.$$

Definition 5.4 En ej nödvändigtvis tidshomogen Dold Markovprocess med ändligt tillståndsrum och ändligt observationsrum sägs vara **stabil** om dels den underliggande Markovkedjan $\{X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n), \dots\}$ är stabil, dels sannolikhetsmatriserna $Q_n = \{q(x, a; t_n) : x \in S, a \in A\}, n = 1, 2, \dots$ som bestämmer observationssannolikheterna är sådana att

$$\inf_{n \geq 1} \{ \inf \{ Q_n(i, a) : Q_n(i, a) > 0 \} \} > 0.$$

Låt oss införa beteckningen

$$\mathcal{V} = \{(v_1, v_2, \dots, v_L) : \sum_{i=1}^L v_i = 1\}$$

och beteckningen $C[\mathcal{V}] = \{u : \mathcal{V} \rightarrow R, u \text{ kontinuerlig}\}$. I definitionen av \mathcal{V} betecknar L antalet element i den ändliga mängden K .

Teorem 5.2 Betrakta en Dold Markovprocess med ändligt tillståndsrum och ändligt observationsrum som är stabil, och antag att den underliggande Markovkedjan $\{X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n), \dots\}$ är odelbar. Antag också att Villkor 5.1 gäller.

Låt μ och ν beteckna två godtyckliga initialfördelningar, låt Y_1, Y_2, \dots, Y_n beteckna observationerna vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots, t_n då startfördelningen var μ och låt Z_1, Z_2, \dots, Z_n beteckna observationerna vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots, t_n då startfördelningen var ν . (Y_1, Y_2, \dots, Y_n och Z_1, Z_2, \dots, Z_n är således stokastiska storheter.)

Låt $\hat{\mu}_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ och $\hat{\nu}_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ beteckna de betingade fördelningarna för den underliggande Markovprocessen vid tiden t_n då startfördelningen var respektive μ och ν . ($\hat{\mu}_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ och $\hat{\nu}_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ är således också stokastiska variabler vars värden beror på utfallen Y_1, Y_2, \dots, Y_n respektive Z_1, Z_2, \dots, Z_n .)

Då gäller, att för varje $u \in C[\mathcal{V}]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E[u(\hat{\mu}_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n))] - E[u(\hat{\nu}_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n))]) = 0.$$

Anmärkning. Löst uttryckt säger resultatet i Teorem 5.2 att när antalet observationer blir mycket stort så kommer fördelningen för den betingade fördelningen vara så gott som oberoende av initialfördelningen.

Bevisen av Teorem 5.1 och Teorem 5.2 bygger på Lemma 6.1, Lemma 6.2 och Lemma 6.3 i [9], samt representationsformeln (4) ovan. För fullständiga bevis se Appendix 1 och Appendix 2.

En konsekvens av Teorem 5.1 är att man oftast mycket väl kan välja den likformiga fördelningen som startfördelning. Det fel man gör uttryckt som ett avståndsmått mellan sannolikhetsfördelningar avtar snabbt allt eftersom man erhåller nya observationer.

En viktig princip som följer av Teorem 5.1 och Teorem 5.2 är följande *konsensusprincip* som lyder: *'Om två personer betraktar en process via ett observationssystem och personerna är överens om observationssannolikheterna för varje tänkbart tillstånd hos den process de betraktar, så kommer deras uppfattning om tillståndet hos processen att allt mer överensstämmer ju fler observationer som erhålles - oberoende av hur olika uppfattning de hade om processens starttillstånd.'*

I vår beskrivning av en Dold Markovprocess har vi antagit att utfallet av en observation vid varje observationstillfälle endast beror av tillståndet hos den underliggande Markovprocessen. En mer allmän modell erhålles om vi tänker oss att vi har flera observationssystem och att valet av observationssystem beror såväl på vår uppfattning om processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$, som vår omvärldsuppfattning.

I nästa avsnitt ska vi presentera en sådan generaliserad version av en Dold Markovprocess.

6 Dolda Markovprocesser med flera observationssystem.

Syftet med detta avsnitt är att introducera beteckningar och härleda formler då vi generaliserar den klass av Dolda Markovprocesser vi presenterade i föregående till en situation då vi kan välja mellan flera observationssystem på ett mycket allmänt sätt som vi beskriver nedan.

Precis som i föregående avsnitt tänker vi oss en Markovprocess $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ med en initial fördelning p_0 vid tiden t_0 och som vi observerar vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots , tidpunkter som är tidsordnade men för övrigt valda godtyckligt. Vi betecknar observationerna som erhålles vid dessa tidpunkter Y_1, Y_2, \dots , och vi betecknar tillståndet för Markovprocessen vid tidpunkterna t_0, t_1, t_2, \dots , antingen $X(t_0), X(t_1), X(t_2), \dots$ eller helt enkelt X_0, X_1, X_2, \dots . Vi antar också tills vidare att tillståndsrummet K för Markovprocessen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ är ändligt och bestående av L tillstånd. Vi låter \mathcal{V}_L beteckna mängden av alla L -dimensionella vektorer så att om $v = (v_1, v_2, \dots, v_L) \in \mathcal{V}_L$ så gäller 1) $v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, L$ och 2) $\sum_{i=1}^L v_i = 1$. Ett element $v \in \mathcal{V}_L$ kan alltså uppfattas som en sannolikhetsvektor - en sannolikhetsfördelning.

Precis som i föregående avsnitt låter vi $p(x, y; s, t)$ beteckna den allmänna övergångssannolikhetsfunktionen för Markovprocessen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$. Funktionen $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ betecknar alltså

$$Pr[X(t_2) = x_2 | X(t_1) = x_1].$$

Matrisen

$$\{p(x_1, x_2; t_0, t_1) : x_1 \in K, x_2 \in K\}$$

betecknar vi P_1 och mer allmänt betecknar vi matriserna

$$\{p(x_1, x_2; t_{n-1}, t_n) : x_1 \in K, x_2 \in K\}$$

$n = 2, 3, \dots$ med $P_n, n = 2, 3, \dots$. Vi betecknar fördelningen för $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram till en godtycklig tidpunkten t , säg, med $\vec{p}(t)$, och fördelningen för $X(t)$ med $p(t)$. Vi låter \mathcal{X}_t bestå av alla tänkbara utfall av processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram till tiden t . Ett element $\xi_t \in \mathcal{X}_t$ anger således en realisering av $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram till tiden t .

Vår uppfattning om processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ vid en *fix* tidpunkt t säg, modelleras som en sannolikhetsfördelning över tillståndsrummet K för processen, och betecknas $\vec{p}(t)$. Ofta är det naturligt att låta sannolikhetsfördelningen $\vec{p}(t)$ och sannolikhetsfördelningen $p(t)$ för $X(t)$ överensstämma, men man kan lätt tänka sig situationer där det kan vara vettigt att utforma modellen så att dessa sannolikhetsfördelningar är olika vilket kan illustreras med följande enkla exempel. Antag t.ex att $X(t_i), i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ representerar resultaten av tärningskast med en perfekt tärning vid tidpunkterna $t_0, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots$. Eftersom tärningen är perfekt så gäller att fördelningen för $X(t_0)$ är den likformiga fördelningen. Antag nu att utfallet på tärningen vid tidpunkterna t_{-1}, t_{-2} , och t_{-3} alla är 6. För en person som inte vet att tärningen är perfekt är det ganska rimligt att tro att sannolikhetsfördelningen för $X(t_0)$ är sådan att $Pr[X(t_0) = 6] > 1/6$. Om vi nu vill modellera en persons spelbeteende vid ett tärningsbord så kan det därför vara rimligt att skilja på fördelningen för $X(t)$ och personens uppfattning om fördelningen för $X(t)$. (Slut exempel.)

Vår uppfattning om processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ - från starttidpunkten till tiden t - modelleras som en sannolikhetsfördelning över tillstånden i rummet \mathcal{X}_t , som vi införde ovan, och betecknas $\vec{\tilde{p}}(t)$. Sannolikhetsfördelningen $\vec{\tilde{p}}(t)$ behöver således inte överensstämma med $\vec{p}(t)$. En generisk sannolikhetsfördelning över rummet \mathcal{X}_t betecknar vi i allmänhet w_t .

För att skapa en process som kan ligga till grund för en modell som ger en god beskrivning av skeendet i verkligheten, behöver vi införa ytterligare ett abstrakt rum som vi betecknar G . Ett element $g \in G$ betecknar en omvärldssituation.

Ett element $g \in G$ skall uppfattas som en vektor vars komponenter anger ett tillstånd i omvärlden. För att modellera vår omvärldsuppfattning tänker vi oss en sannolikhetsfördelning över rummet G . Vi betecknar vår omvärldsuppfattning med h eller $h(g)$, $g \in G$ eller h_t om vi vill betona tidpunkten. Syftet med att kunna modellera vår uppfattning om omvärlden är bl a att vi vill kunna modellera att vi använder våra observationssystem olika om vi är i en krigssituation eller inte.

Till skillnad mot föregående avsnitt tänker vi oss nu att vi har *flera observationssystem* att välja mellan, närmare bestämt M stycken, som vi betecknar s_1, s_2, \dots, s_M . Det val av observationssystem, som görs vid tiden t_n , betecknar vi U_n eller $U(t_n)$.

Valet av observationssystem kan bero på många storheter men främst på vilken tidpunkt vi är i och vår uppfattning om tillståndet hos processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram till tiden t_n . Men även vår omvärldsuppfattning h_{t_n} vid tidpunkten t_n kan påverka valet av observationssystem.

Mängden av olika observationssystem får vara en oändlig, numrerbar eller ickenumrerbar, mängd men för att underlätta implementering är det lämpligt att antaga att antalet observationssystem är ändligt.

Nu ytterligare några beteckningar. Vi inför beteckningen \tilde{p}_n för att ange vår uppfattning om tillståndet hos processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ vid tidpunkten t_n precis innan vi erhållit observationen vid tidpunkten t_n , och vi inför beteckningen \vec{p}_n för att ange vår uppfattning om tillståndet hos processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram till tidpunkten t_n precis innan vi erhållit observationen vid tidpunkten t_n . Sannolikhetsfördelningen \tilde{p}_n kan ses som en marginalfördelning av \vec{p}_n .

Vidare inför vi beteckningen $\hat{\tilde{p}}_n$ för att ange vår uppfattning om $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ vid tidpunkten t_n omedelbart efter att vi erhållit observationen Y_n , och vi låter $\hat{\vec{p}}_n$ beteckna vår uppfattning om $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram t o m tiden t_n omedelbart efter att vi erhållit observationen Y_n . Sannolikhetsfunktionen $\hat{\tilde{p}}_n$ kan betraktas som marginalfördelningen av sannolikhetsfunktionen $\hat{\vec{p}}_n$.

Den regel som styr valet av observationssystem kan vara deterministisk eller stokastisk. Vi betecknar valfunktionen med $R(w, h, t, s)$ som ska tolkas så att

$$R(w, h, t_n, s) = Pr[U(t_n) = s | \tilde{p}_n = w, h]$$

dvs $R(w, h, t, s)$ är sannolikheten att vi som observationssystem väljer systemet s givet att den sannolikhetsfördelning som beskriver vår uppfattning om läget $\{X(\tau), \tau < t\}$ ges av vektorn w och att den sannolikhetsfördelning som beskriver vår omvärldsuppfattning är h .

Det faktum att vi tillåter att $R(w, h, t, s) = 1$, innebär således att för vissa värden på w, h och t är valet av observationssystem entydigt bestämt.

Det bör också påpekas att vid explicita tillämpningar måste ganska stora avgränsningar göras i tid och rum beträffande funktionen $R(w, h, t, s)$,

Efter det att vi valt ett observationssystem så beror den observation $Y(t)$, säg, som erhållits vid tidpunkten t enbart på tillståndet $X(t)$ vid tidpunkten t hos processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ samt - eventuellt - också tidpunkten t .

Sannolikhetsfunktionen för det s_k :e observationssystemet betecknar vi $q(x, t, a; k)$ i linje med beteckningen i föregående avsnitt. Mängden av alla observationsstillstånd betecknar vi med A . Vi tänker oss att antalet observationer är ändligt.

Vi ska nu redovisa några formler med vars hjälp ett antal viktiga betingade sannolikhetsfördelningar kan beräknas allt eftersom nya observationer erhålles.

Vi inför först ytterligare några beteckningar. Låt som ovan w_t ange en sannolikhetsfördelning för processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram till tidpunkten t , och låt h_t ange en sannolikhetsfördelning som beskriver vår omvärldsuppfattning vid tidpunkten t .

Låt oss definiera

$$\bar{q}(w_t, h_t, x, a, t) = \sum_k R(w_t, h_t, t, s_k)q(x, t, a; k). \quad (6)$$

$\bar{q}(w_t, h_t, x, a, t)$ anger således sannolikheten för att erhålla observationen a givet att 1) tillståndet för Markovprocessen var x , 2) vår uppfattning om processen fram till tiden t ges av sannolikhetsfördelningen w_t , och 3) vår omvärldsuppfattning beskrivs av sannolikhetsfördelningen h_t . Vi definierar

$$\bar{Q}_n = \{\bar{q}(w_{t_n}, h_{t_n}, x, a, t_n) : x \in K, a \in A\}.$$

Med hjälp av \bar{Q}_n kan vi nu formulera formler som är mycket lika formlerna i avsnitt 5.

Låt p_0 beteckna fördelningen för $X(t_0)$ vid tiden t_0 . Som ovan låter vi $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ beteckna den övergångssannolikhetsfunktion som styr Markovprocessen. Fördelningen för processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram till tidpunkten omedelbart innan vi väljer observationssystem vid tidpunkten t_n betecknar vi \vec{p}_{t_n} . Låt $\hat{p}_n, n = 1, 2, \dots$ beteckna den betingade sannolikhetsfördelningen för $X(t_n)$ omedelbart efter att den n :e observationen erhållits. Låt vidare $\tilde{p}_n, n = 1, 2, \dots$ beteckna den sannolikhetsfördelning som beskriver vår uppfattning om läget fram till tidpunkten t_n , innan vi erhållit observationen Y_n , och låt h_n ange vår omvärldsuppfattning vid tidpunkten t_n innan vi erhållit observationen Y_n .

Vi inför nu beteckningen $\bar{Q}_{n,a} = \{\bar{Q}_{n,a}(x, y) : x \in K, y \in K\}$ för den diagonalmatris som definieras genom

$$\bar{Q}_{n,a}(x, x) = \bar{q}(\tilde{p}_n, h_n, x, a, t_n), \quad x \in K. \quad (7)$$

Helt i analogi med formlerna i avsnitt 5 erhåller vi nu följande formler.

$$Pr[Y_1 = a_1, Y_2 = a_2, \dots, Y_N = a_N] = \\ ||p_0 P_1 \bar{Q}_{1,a_1} \dots P_N \bar{Q}_{N,a_N}|| \quad (8)$$

och

$$\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} P_N \bar{Q}_{N,a_N} / ||\hat{p}_{n-1} P_N \bar{Q}_{N,a_N}|| = \\ p_0 P_1 \bar{Q}_{1,a_1} \dots P_N \bar{Q}_{N,a_N} / ||p_0 P_1 \bar{Q}_{1,a_1} \dots P_N \bar{Q}_{N,a_N}||. \quad (9)$$

För att ovanstående formler ska vara användbara i de fall valet av nytt observationssystem beror av vår uppfattning $\tilde{p}(t)$ om processen $\{X(\tau), t \in \mathcal{T}\}$, måste vi kunna bestämma och uppdatera $\tilde{p}_n, n = 1, 2, \dots$

För att uppdatera $\tilde{p}_n, n = 1, 2, \dots$ måste vi kunna bestämma $\hat{\tilde{p}}_n, n = 1, 2, \dots$. Det kan göras på exakt samma sätt som vi beskrev i avsnitt 4.

Beräkningarna blir som följer. Låt ξ beteckna ett utfall fram till tiden t_i och låt x_ξ beteckna ξ 's värde vid tiden t_i . Låt \tilde{p}_{t_i} beteckna den sannolikhetsfördelning som beskriver vår uppfattning om $\{X(\tau), \tau \leq t_i\}$ fram till tiden t_i efter att de $i - 1$ första observationerna erhållits men innan den i :e observationen erhållits.

Sannolikheten för att $\{X(\tau), \tau \leq t_i\} = \xi$ och att också Y_i är a vid tiden t_i kan uttryckas på följande sätt:

$$Pr[\{X(s), s \leq t_i\} = \xi, Y_i = a] = \tilde{p}_{t_i}(\xi) \sum_k R(\tilde{p}_{t_i}, h_i, t_i, s_k) q(x_\xi, a; k)$$

och på liknande sätt fås

$$Pr[Y_i = a] = \sum_\eta \tilde{p}_{t_i}(\eta) \sum_k R(\tilde{p}_{t_i}, h_i, t_i, s_k) q(x_\eta, a; k)$$

varav följer att

$$\hat{\tilde{p}}_i(\xi) = Pr[\{X(s), s \leq t_i\} = \xi | Y_i = a] =$$

$$Pr[\{X(s), s \leq t_i\} = \xi, Y_i = a] / Pr[Y_i = a] =$$

$$\tilde{p}_{t_i}(\xi) \sum_k R(\tilde{p}_{t_i}(\xi), h_i, t_i, s_k) q(x_\xi, a; k) / \sum_\eta \tilde{p}_{t_i}(\eta) \sum_k R(\tilde{p}_{t_i}(\eta), h_i, t_i, s_k) q(x_\eta, a; k).$$

Detta samband kan också uttryckas som en normerad matrismultiplikation i analogi med formel (9). Speciellt gäller att vår uppfattning \hat{p}_n om tillståndet hos processen $\{X(\tau), t \in \mathcal{T}\}$ vid tiden t_n omedelbart efter att vi erhållit observationen Y_n vid tiden t_n kan uttryckas med hjälp av följande rekursionsformel:

$$\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} P_n \overline{Q}_{n,a_n} / \|\hat{p}_{n-1} P_n \overline{Q}_{n,a_n}\|$$

varvid \overline{Q}_{n,a_n} definieras med hjälp av formel (7).

7 Dolda Markovprocesser och Bayesianska nät.

De senaste decennierna har intresset för Bayesianska nätverk vuxit kraftigt. Definitionen av ett Bayesiansk nät är i korthet som följer. Man utgår från en så kallad *riktad ickecyklisk graf* (directed acyclic graph (DAG)). Kanterna som förbinder olika noder har således en riktning och att den riktade grafen är ickecyklisk betyder att man inte kan komma tillbaka till en utgångsnod om man följer sammanhängande kanter i så att säga rätt riktning.

Till varje nod i den riktade grafen associerar vi en stokastisk variabel, - en stokastisk storhet. Antalet stokastiska variabler är således lika många som antalet noder i grafen.

Sannolikhetsfördelningen för de olika stokastiska variablerna erhålles på följande sätt. Alla stokastiska variabler, som finns placerade i en nod till vilken ingen kant leder in (en sådan nod kallas en rot), ges en sannolikhetsfördelning. För övriga stokastiska variabler tillordnar vi vad man skulle kunna kalla för betingade sannolikhetsfördelningar. Dessa betingade sannolikhetsfördelningar bestämmer sannolikheten för att en viss stokastisk variabel A, säg, vid en viss nod N, säg, skall anta ett viss värde, givet tillståndet för alla de stokastiska variabler som är sådana att deras noder har en riktad kant som slutar i nod N. (I fortsättningen kommer vi att använda samma beteckning för en stokastisk variabel i ett Bayesiansk nätverk som för dess nod.)

Med hjälp av fördelningarna för de stokastiska variabler som är belägna vid grafens rötter, (det finns alltid minst en rot), kan man därefter rekursivt bestämma sannolikhetsfördelningen för alla stokastiska variabler, och även den gemensamma fördelningsfunktionen för alla stokastiska variablerna.

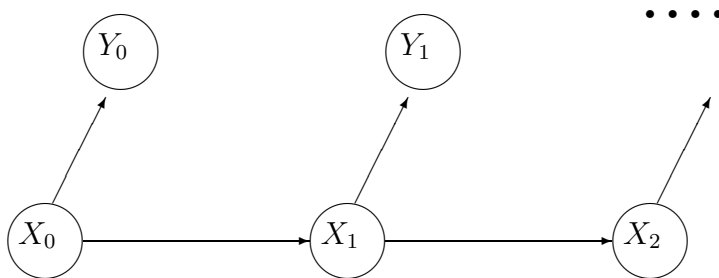
En förhållandevis enkel framställning av teorin för Bayesianska nätverk finns att läsa i boken [8].

Det som gör Bayesianska nätverk intressanta är att ny information om en eller fler stokastiska storheter snabbt (ganska snabbt) kan distribueras genom nätverket. Den nya informationen leder således till en uppdatering av sannolikhetsfördelningen i varje nod.

En Dold Markovprocess med ett enda observationssystem kan enkelt utformas som ett Bayesianiskt nät på följande sätt. Antag att vi erhåller observationer vid tidpunkterna $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$. Vi betecknar observationerna vid dessa tidpunkter $\{Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ respektive. Vi sätter $X_i = X(t_i)$. De stokastiska variablerna i vårt Bayesianiska nätverk består helt enkelt av de stokastiska variablerna $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_N\}$ och $\{Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$.

Den riktade grafen är som följer. Vi har en riktad kant från X_{n-1} till X_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ och vi har en riktad kant från X_n till Y_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$. (Se Figur 1.)

Vi har nu bestämt den riktade grafen och de stokastiska variablerna. Återstår att bestämma sannolikhetsfördelningen för det Bayesianiska nätverket. För "rotnoden" X_0 väljer vi som sannolikhetsfördelning helt enkelt p_0 . Den betingade fördelningen för Y_n givet X_n bestäms av sannolikhetsfunktionen $q(x, a)$ och den betingade fördelningen för X_n givet X_{n-1} bestäms av sannolikhetsfunktionen $p(x_1, x_2, t_{n-1}, t_n)$.



Figur 1

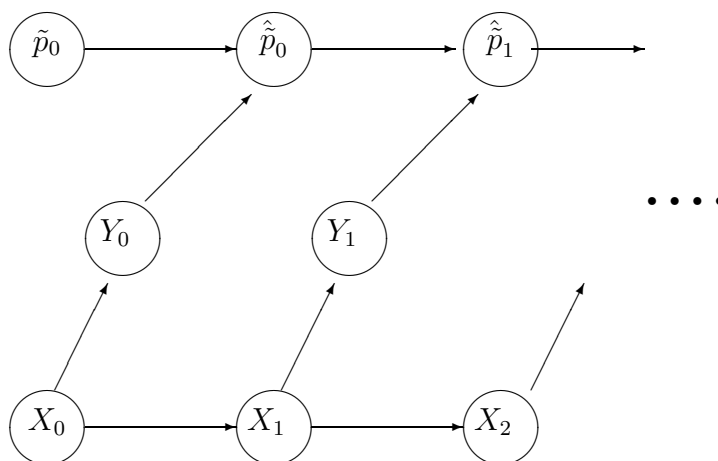
Innan vi beskriver ett Bayesianiskt nätverk hörande till den mer generella modell som vi beskrivit i avsnitt 6 ska vi ge ett alternativt Bayesianiskt nätverk för en Dold Markovprocess.

Förutom tillståndsnoderna $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ och observationsnoderna $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots$ så inför vi ytterligare en uppsättning noder som vi betecknar $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, \dots$. Storheterna $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, \dots$ betecknar vår uppfattning om fördelningen för X_n efter att vi erhållit observation Y_n , och \tilde{p}_0 anger vår initaluppfattning om noden X_0 's fördelning. För dessa noder gäller att noden \tilde{p}_0 är en rot. Fördelningen för den stokastiska variabeln \tilde{p}_0 kan vara svår att beskriva; oftast så kommer fördelningen att vara en enpunktsfördelning, som dessutom överensstämmer med den fördelning som noden X_0 antas ha. Så behöver dock inte vara fallet, som tärningsexemplet i avsnitt 6 ovan visar.

Vad beträffar kanter i nätet, så finns inga kanter från noderna \tilde{p}_n till någon av tillståndsnoderna $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ eller till någon av observationsnoderna

$Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots$. Däremot finns det en kant från \hat{p}_{n-1} till \hat{p}_n och också en kant från Y_n till $\hat{p}_n, n = 0, 1, \dots$ samt en kant från \tilde{p}_0 till \hat{p}_0 .

Grafen för det Bayesianiska nätet blir i detta fall som följer.



Figur 2

Vi behöver också bestämma sannolikheterna för rotnoderna och de betingade fördelningarna för övriga noder. Sannolikhetsfördelningen för rotnoden \tilde{p}_0 tänker vi oss i allmänhet som en enpunktsfördelning, dvs \tilde{p}_0 kan anta ett enda värde. Detta värde kan exempelvis vara lika med fördelningen p_0 för noden X_0 . Men den kan också väljas på annat sätt. Vad beträffar de betingade fördelningarna så är de betingade fördelningarna för Y_n givet X_n desamma som i det förra Bayesianiska nätet, och de betingade fördelningarna för X_{n+1} givet X_n också desamma som i föregående Bayesianiska nät, medan för $n = 1, 2, \dots$ den betingade fördelningen för \hat{p}_n , givet \hat{p}_{n-1} och Y_n , är en deterministisk funktion, dvs värdet på den stokastiska variabeln \hat{p}_n är entydigt bestämt av värdet på \hat{p}_{n-1} och värdet a_n (säg) på Y_n , och detta värde bestäms av sambandet

$$\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} \times P_n \times \tilde{Q}_{n,a_n} / \|\hat{p}_{n-1} \times P_n \times \tilde{Q}_{n,a_n}\|,$$

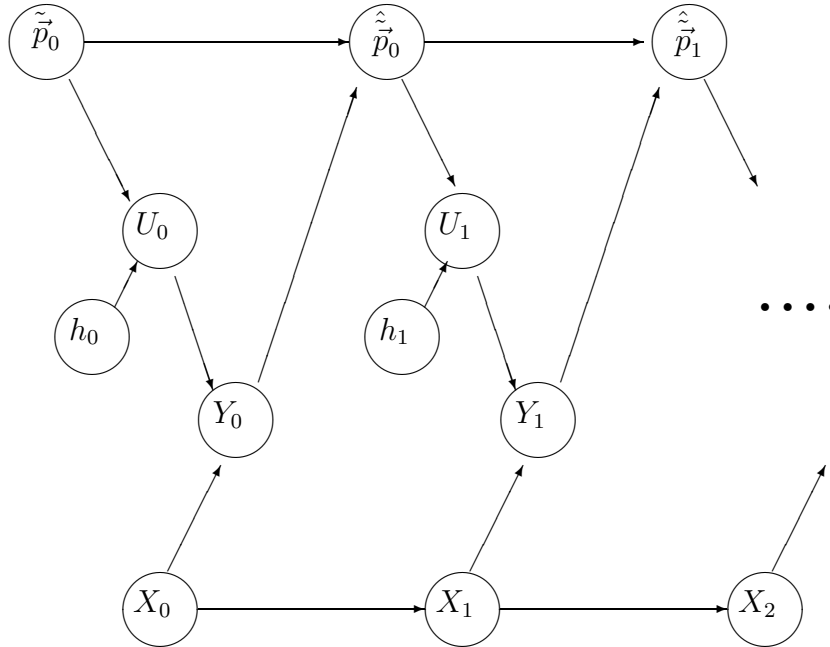
en formel som också gäller för $n = 0$ om vi betecknar $\tilde{p}_0 = \hat{p}_{-1}$ och låter P_0 beteckna enhetsmatrisen.

Därmed är sannolikhetsfördelningarna bestämda för detta alternativa Bayesianiska nät. Om vi väljer $\hat{p}_{-1} = p_0$ så är det senare nätet informationsmässigt helt ekvivalent med det förra nätet.

På liknande sätt kan den mer generella modell som vi beskrivit i avsnitt 6 beskrivas med hjälp av ett Bayesianskt nätverk.

De stokastiska variablerna är i detta fall, förutom tillstånden X_n vid tidpunkterna t_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ och observationerna Y_n vid tidpunkterna t_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ även de stokastiska storheterna U_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ som anger vilket observationssystem som valdes vid tiden t_n samt de stokastiska storheterna \hat{p}_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ som anger vår uppfattning om processen $\{X(\tau), t \leq t_n\}$ uttryckt som en sannolikhetsfördelning efter det att vi erhållit observationerna Y_n vid tidpunkterna t_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Dessutom finns en rotnod \tilde{p}_0 som beskriver vår initialuppfattning uttryckt som en sannolikhetsfördelning för processen $\{X(\tau), t < t_0\}$ fram till dess den första observationen erhålles. Slutligen har vi en uppsättning noder för storheterna h_n , $n = 0, 1, 2, \dots$.

Den riktade grafen har följande struktur. Rotnoderna är X_0 , \tilde{p}_0 samt h_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Sen finns det en kant från \tilde{p}_0 till U_0 och likaså kanter från \hat{p}_n till U_n för $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ och kanter från h_n till U_n för $n = 0, 1, 2, \dots$. Vidare finns det kanter från X_n till Y_n och kanter från U_n till Y_n för $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Slutligen finns kanter från Y_n till \hat{p}_n för $n = 0, 1, 2, \dots, N$ och kanter från \tilde{p}_n till \hat{p}_{n+1} för $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.



Figur 3

För att slutföra beskrivningen av det Bayesianiska nätet behöver vi dels fastställa fördelningen för rotnoderna X_0 , \tilde{p}_{-1} och h_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ samt de betingade fördelningarna för de övriga noderna. Det är inte svårt att med hjälp av de funktioner som infördes i föregående avsnitt härleda de betingade sannolikhetsfördelningarna. De stokastiska fördelningarna i rotnoderna kan inte härledas med hjälp av några fysikaliska överväganden utan måste preciseras beroende på omständigheterna.

Även om Bayesianiska nät är lämpliga strukturer ur beräkningssynpunkt, så gäller ändå att om tillståndsrummen blir väldigt stora så blir beräkningstiderna också väldigt långa. I det senaste exemplet där vi beskriver en Dold Markovprocess med flera observationssystem och mycket generell valfunktion, så måste man säkert i praktiken göra kraftiga förenklingar både vad avser sannolikhetsfördelningarnas form som exempelvis valfunktionens beroende av vår tillståndsuppfattning. En första förenkling som ligger mycket nära till hands att göra är att låta valfunktionen enbart bero på vår uppfattning om processen just när vi skall göra valet av observationssystem, dvs på den sannolikhetsfördelning som vi betecknar \tilde{p} , i stället för att låta valfunktionen bero på sannolikhetsfördelningen \vec{p} som anger vår uppfattning om processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ fram till tiden t . Tillståndsrummen

på vilka sannolikhetsfördelningarna \hat{p}_n och \tilde{p} är definierade kan i praktiken bli mycket stora - så stora att exakta beräkningar blir omöjliga att genomföra.

I praktiken behöver man därför ofta använda sig av olika tekniker som kan minska beräkningstiden. En teknik är att använda sig av ett tröskelvärde som anger den gräns när ett lågt sannolikhetsvärde kan ersättas med 0. En annan enkel teknik är att föra samman (aggregera) närliggande tillstånd till ett gemensamt tillstånd, varigenom tillståndsrummets storlek kan minskas.

8 Analys med hjälp av Bayesianiska nät.

Syftet med att beskriva de Dolda Markovprocesserna som vi införde i avsnitt 6 med hjälp av Bayesianiska nätverk är att vi vill använda teorin för Bayesianiska nätverk för att besvara olika frågeställningar rörande de Dolda Markovprocesserna.

Situationen är väsentligen som följer. Antag att vi modellerar vårt analysproblem som en Dold Markovprocess med flera observationssystem. Dvs, vi har 1) en modell för hur en tillståndsvektor förändras över tiden, 2) en modell för hur vi väljer observationssystem beroende på vår uppfattning om tillståndsvektorn, och 3) en modell för hur observationsdata beror på observationssystem och tillståndsvektorn. Denna information är vad vi behöver för att så att säga "ladda" det Bayesianiska nätverket.

Därefter "exekveras" nätet. Det innebär att vi gör våra val av observationssystem $U_n, n = 1, 2, \dots, n$, och vi erhåller våra observationer $Y_n, n = 1, 2, \dots, n$. Så fort vi erhållit en ny observation Y_n så kan vi med hjälp av enkla algoritmer uppdatera dels sannolikhetsfördelningarna för $X_m, m = 0, 1, 2, \dots, n-1, n, n+1, \dots, N$, dels sannolikhetsfördelningen för \hat{p}_n , respektive \tilde{p}_n . Däremot kommer sannolikhetsfördelningarna för $\hat{p}_m, m < n$ respektive $\tilde{p}_m, m < n$ inte att förändras eftersom våra redan gjorda val av observationssystem inte kommer att förändras.

Som påpekats ovan kan uppdateringen av sannolikhetsfördelningarna hos de enstaka noderna göras lätt i Bayesianiska nät helt enkelt med hjälp av Bayes formel. Ett tillämpningsområde där Bayesianiska nät använts med stor framgång det senaste decenniet är kodningsteori. Se t.ex. [5] och [15].

I kodningsteorin är man ofta intresserad av att beräkna följande storhet:

$$\max Pr[X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N | Y_1 = a_1, \dots, Y_N = a_N]$$

varvid maximum sökes över alla möjliga värden på x_1, x_2, \dots, x_n . Sådana maxvärdesberäkningar kan också göras snabbt i Bayesianiska nätverk med algoritmer liknande Viterbialgoritmen.

Den här typen av frågeställning kommer säkert att visa sig viktig i samband med lägesanalys. Att kunna bestämma största sannolikheten för en följd av tillstånd ett antal tidssteg bakåt i tiden t.ex.

$$\max Pr[X_{N-2} = x_{N-2}, X_{N-1} = x_{N-1}, X_N = x_N | Y_1 = a_1, \dots, Y_N = a_N],$$

och således inte bara maximumvärdet

$$\max Pr[X_N = x_N | Y_1 = a_1, \dots, Y_N = a_N]$$

kommer det säkert att finnas behov för, och med hjälp av de algoritmer som utvecklats inom teorin för Bayesianska nät kan detta också göras. Helst skulle man vilja kunna beräkna sannolikhetsfördelningen för

$$Pr[X_{N-n} = x_{N-n}, X_{N-n+1} = x_{N-n+1}, \dots, X_N = x_N | Y_1 = a_1, \dots, Y_N = a_N]$$

för ett antal tidssteg bakåt, och inte bara maximumvärdet

$$\max Pr[X_{N-n} = x_{N-n}, X_{N-n+1} = x_{N-n+1}, \dots, X_N = x_N | Y_1 = a_1, \dots, Y_N = a_N].$$

I teorin är detta inte komplicerat men i praktiken är en bestämning av en flerdimensionell fördelningsfunktion ofta mycket tidskrävande.

9 Dolda Markovprocesser med aktionssystem.

I detta avsnitt beskriver vi ytterligare ett antal storheter och variabler, som en modell för markmålföljning kan tänkas innehålla.

Vi börjar med att införa en speciell klass av noder som kan kallas för vädersituationsnoder. Vädersituationen påverkar 1) vårt val av observationssystem, 2) den observation som erhålles av ett observationssystem, 3) rörelsen hos processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$, 4) vårt val av aktionssystem, samt 5) resultatet av en aktion. Det finns därför skäl att i den allmänna systembeskrivningen inkludera även vädersituationen vid olika tidpunkter som tillståndsvariabler. Vi betecknar dessa storheter W_0, W_1, \dots, W_n anger således vädersituationen vid tidpunkten t_n .

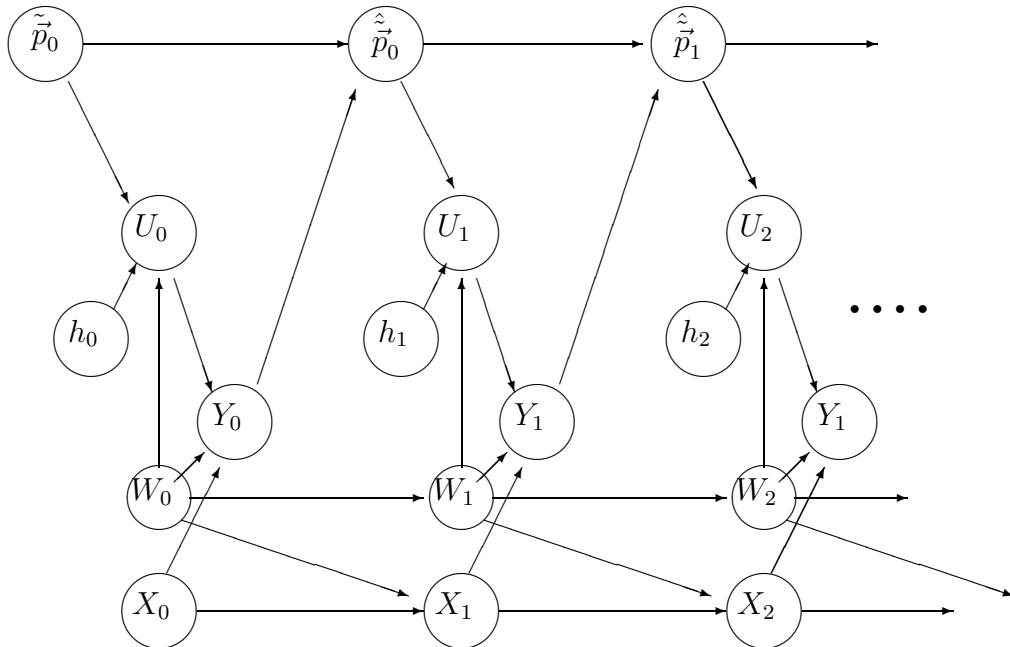
Att inkludera dessa storheter i ett Bayesiansk nät är enkelt att göra. Låt oss utgå från den generella modell som beskrevs i slutet av avsnitt 6 (se Figur 3 i avsnitt 7.) Vi har således en Markovprocess $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ med en känd övergångssannolikhetsfunktion $p(x, y, s, t)$. Vi har en samling $S = \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$ av observationssystem och en tillhörande valfunktion som beror på vår uppfattning om Markovprocessen och vår omvärldsuppfattning. För varje observationssystem s_k har vi definierat en sannolikhetsfunktion $q(x, t, a; k)$ som bestämmer sannolikheten för att observationssystemet s_k vid tiden t erhåller observation a om tillståndet för Markovprocessen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ vid tiden t var x . Vår omvärldsuppfattning vid tiden t beskriver vi med hjälp av en sannolikhetsfördelning h_t över alla

tänkbara omvärldstillstånd $g \in G$. Vår omvärldsuppfattning kan påverka valet av observationssystem.

När vi nu inför vädersituationen som en egen explicit storhet så kommer det Bayesianska nätet att utvidgas på följande sätt.

Först och främst så infogar vi noderna $W_0, W_1, \dots, W_n, \dots$. Vidare fogar vi kanter från W_{n-1} till $W_n, n = 1, 2, \dots$. Vidare går det kanter från W_n till X_{n+1} , till U_{n+1} och till Y_n .

Fogar vi dessa noder och grafer till figuren i Figur 3 erhåller vi följande nätverk.



Figur 4

Nästa utvidgning vi ska beskriva är den situation då man har möjlighet att aktivt ingripa i markmålens rörelse. Vi tänker oss alltså att vi har tillgång till *aktionssystem*.

Situationen är alltså följande. Efter att vi erhållit en ny observation Y_i har vi möjlighet att interagera med processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$ genom att välja ett av flera möjliga aktionssystem. Vi tänker oss således att vi har flera aktionssystem att välja mellan. Vi betecknar mängden av aktionssystem med $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_{N_f}\}$ där således N_f anger antalet möjliga aktionssystem.

För varje aktionssystem f_j , tillordnar vi en sannolikhetsfunktion $e_j(x, t, z, \omega)$ som anger sannolikheten för att processen vid tiden strax efter t skall befinna sig i tillstånd z efter det att vi vid tidpunkt t använt aktionssystem f_j och processen då befann sig i tillståndet x och vädersituationen var ω .

Precis som för de olika observationssystemen $s_k, k = 1, 2, \dots, M$ inför vi en valfunktion som bestämmer sannolikheten för att vi vid tiden t beslutar oss för att använda aktionssystemet f_j . Vi betecknar valfunktionen $D(w, h, t, \omega, j)$ och i analogi med valfunktionen för observationssystem låter vi valfunktionen $D(w, h, t, \omega, j)$ bero på vår uppfattning w om processen $\{X(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$, vår omvärldsuppfattning h , tidpunkten t , samt vädersituationen ω .

Ytterligare en situation som vi vill kunna hantera är den situationen då vi oväntat erhåller ny information om var Markovprocessen befann sig vid en viss (tidigare) tidpunkt. Vi vill på ett enkelt sätt - inom modellens ram - kunna hantera denna typ av ny information.

Det sätt vi gör det på är att vi tänker oss att mellan två observationstidpunkter så har ett externt observationssystem, som vi inte kan påverka, observerat processen. Oftast kommer denna externa observation så att säga vara tom, dvs det görs ingen extern observation, och då förändras varken sannolikhetsfördelningen för den stokastiska processen eller vår uppfattning om den stokastiska processen. Emellanåt erhålles dock ny extern information och då görs uppdateringar.

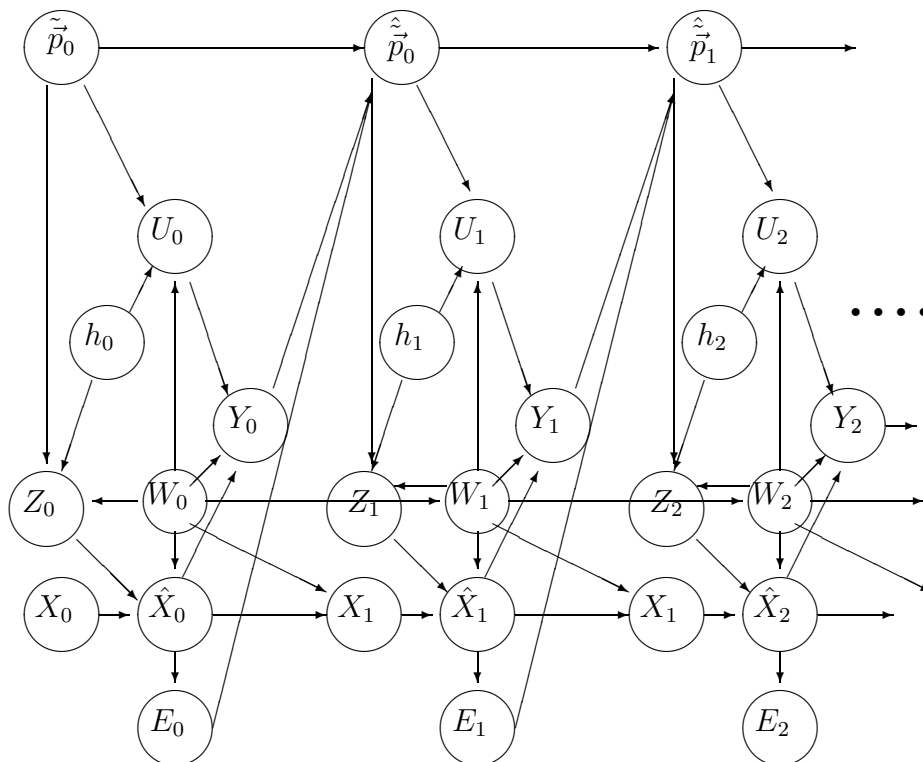
Vi ska nu beskriva denna generaliserade version av en Dold Markovprocess som ett Bayesianiskt nätverk.

Vi utgår från den beskrivning som ledde fram till Figur 4 ovan. Eftersom resultatet av en aktion beror såväl på vilket aktionssystem som valdes, som på vädersituationen, som på tillståndet, är det lämpligt att införa ytterligare en tillståndsnod som anger tillståndet omedelbart efter en aktion. Vi betecknar dessa noder $\hat{X}_n, n = 0, 1, 2, \dots$. Vi inför dessutom ytterligare noder, som vi betecknar $Z_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ och $E_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$. $Z_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ anger vilket aktionssystem som vi valde. Värdena på storheterna $Z_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ är således $1, 2, \dots, N_f$. Dessutom får $Z_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ anta värdet 0 som betyder att inget aktionssystem valdes. $E_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$, anger ett utfall på eventuell extern information rörande tillståndet hos den stokastiska variabeln X_n .

I det Bayesianiska nät vi presenterar har vi valt att knyta denna "informationsnod" till noderna \hat{X}_n men den kunde lika gärna knutits till noderna X_n .

Vi fogar nu ytterligare kanter till det Bayesianiska nätet. Vi tillfogar kanter från noderna $\hat{p}_n, n = 0, 1, 2, \dots$ till noderna $Z_n, n = 1, 2, \dots, N$ som alltså anger vilket aktionssystem som valdes vid tidpunkten t_n . Vidare tillfogar vi kanter från noderna $Z_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ och noderna $X_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ till noderna $\hat{X}_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ samt nya kanter från noderna $h_n, n = 1, 2, \dots$ till $Z_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ vilket beskriver att vårt val av aktionssystem också kan påverkas av

vår omvärldsuppfattning. Dessutom fogar vi en kant från \tilde{p}_0 till Z_0 . Vidare fogar vi en kant från \hat{X}_n till E_n , $n = 0, 1, \dots, N$, samt kanter från E_n , $n = 0, 1, \dots, N$ till \hat{p}_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Dessutom fogar vi ett antal kanter från "vädernoderna" W_n , $n = 0, 1, \dots, N$ nämligen från W_n till \hat{X}_n , från W_n till X_{n+1} , samt från W_n till Z_n . Slutligen ersätter vi kanterna från X_n till Y_n med kanter från \hat{X}_n till Y_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$.



Figur 5

10 Dolda Markovprocesser och Kalmanfilter.

I detta avslutande kapitel skall vi kort beskriva hur modeller baserade på Kalmanfilterteorin kan fogas in i det synsätt som redogjorts för ovan.

I korthet är teorin för Kalmanfilter följande. Låt $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ vara en sekvens av tillståndsvektorer. \bar{x}_n kan t ex ange, lägeskoordinater, hastighetskoordinater och accelerationskoordinater för ett objekt vid tiden t_n .

Låt $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots$ beteckna mätningar av respektive $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ gjorda vid tidpunkterna t_0, t_1, t_2, \dots .

Begreppet filter brukar tolkas så att man med hjälp av filtret vill åstadkomma en skattning av tillståndsvektorn \bar{x}_n (vid tiden t_n) på basis av mätningarna $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots$. Begreppet prediktion brukar användas för att skatta \bar{x}_m på basis av mätningarna (observationerna) $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ vid en tidpunkt t_m senare än t_n .

I Kalmanfilterteorin härleder man en optimal skattningsmetod för en klass av modeller.

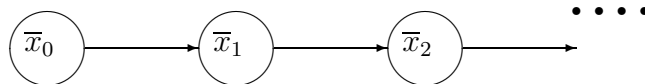
Vi ska här helt kort redogöra för Kalmanfilterteorin för ett enkelt linjärt system. Vi betraktar ett system vid tidpunkterna t_0, t_1, \dots . Systemets tillstånd beskrivs med hjälp av en tillståndsvektor. Värdet på denna tillståndsvektor förändras med tiden. Samspelet mellan två konsekutiva tillstånd \bar{x}_n och \bar{x}_{n+1} beskrivs med följande formel.

$$\bar{x}_{n+1} = \Phi_n \bar{x}_n + \bar{w}_n \quad (10)$$

varvid Φ_n anger ett linjärt samband, och \bar{w}_n antas vara en normalfördelad stokastisk vektor med medelvärdesvektor lika med nollvektorn och med kovariansmatris Q_n . Φ_n är således en $m \times m$ -matris om tillståndsvektorn har dimension m . Det initiala läget vid tidpunkten t_0 antas vara normalfördelat med medelvärdesvektor $\hat{\bar{x}}_0$ och kovariansmatris P_0 . Detta betyder att systemet som vi studerar modelleras som en Markovkedja $X_n, n = 0, 1, 2, \dots$ med ganska speciell struktur. Tillståndsvektorn är m -dimensionell med tillståndsrummet = hela R^m . Startfördelningen p_0 är normalfördelad med känd fördelning. Övergångssannolikhetsfunktionerna som styr processen mellan två tidpunkter t_n och t_{n+1} karakteriseras av en täthetsfunktion $f(\bar{x}, \bar{y}, t_n, t_{n+1})$, som i detta fall kan skrivas

$$f(\bar{x}, \bar{y}, t_n, t_{n+1}) = (|\det(Q_n)| / (\sqrt{(2\pi)^m})) \exp(-(\Phi_n \bar{x} - \bar{y})^t Q_n (\Phi_n \bar{x} - \bar{y}) / 2).$$

Eftersom en Markovkedja kan uttryckas som ett Bayesianskt nätverk på ett mycket enkelt sätt, kan sambandet (7) ovan illustreras på följande enkla sätt.



Figur 6

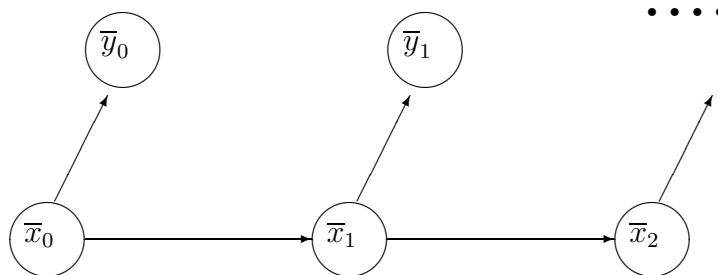
I de enklaste modellerna i Kalmanfilterteorin antar man att sambandet mellan en tillståndsvektor \bar{x} och mätdata \bar{y} (observationsdata) kan skrivas så att $\bar{y} =$

$H\bar{x} + \bar{v}$ varvid \bar{y} anger en k -dimensionell vektor, \bar{x} anger den m -dimensionella tillståndsvektorn, H anger ett linjärt samband mellan \bar{y} och \bar{x} uttryckt som en $k \times m$ matris, och \bar{v} är en k -dimensionell felvektor, som återigen antas vara en normalfördelad stokastisk vektor med medelvärdesvektor lika med nollvektorn och med kovariansmatris R .

Uttryckt i den begreppsapparat som vi infört för Dolda Markovprocesser kan således mätningarna ses som observationer av en Markovkedja. Sannolikhetsfunktionen som styr observationsutfallet \bar{y}_n , givet att tillståndet var \bar{x}_n kan i detta fall uttryckas med hjälp av en täthetsfunktion

$$q_n(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = (|\det(R_n)| / (\sqrt{2\pi})^m) \exp(-(H_n \bar{x}_n - \bar{y}_n)^t R_n (H_n \bar{x}_n - \bar{y}_n) / 2).$$

Detta linjära Kalmanfilter kan således betraktas som en Dold Markovprocess med ett observationssystem. (Se Figur 7 nedan och jämför med Figur 1.)



Figur 7

Som påpekats ovan är styrkan med Bayesianiska nät att man snabbt kan sprida information från en nod till de övriga. Emellertid så förutsätter detta i allmänhet att alla utfallsrum är ändliga. Men det finns andra situationer då den uppdatering av de betingade sannolikhetsfunktionerna som måste göras då man erhåller ny information kan göras snabbt och effektivt, och en sådan situation är just den då alla inblandade sannolikhetsfördelningar är normalfördelningar. De beräkningsformler som man härleder inom Kalmanfilterteorin bygger på Bayes sats, och denna sats är också grunden för uppdateringen i Bayesianiska nät.

Det som är intressant att konstatera är att om man fogar detta exempel inom Kalmanfilterteorin in i teorin för Dolda Markovprocesser, försvinner all diskussion om optimalitet. De observationer som erhålles skapar betingade fördelningar

hos noderna som beskriver Markovprocessens tillstånd. Dessa fördelningar kommer i detta Kalmanfilterteoriexempel alltid att vara normalfördelningar vilket gör att det tillstånd för vilket täthetsfunktionen antar störst värde är medelvärdet. Därför, om man måste skatta ett värde för tillståndet är det naturligt att välja medelvärdet som skattning. Att denna skattning är medelvärdesriktig är uppenbart och att den dessutom har minst varians - och i den meningen är bäst - är en konsekvens av egenskaper hos normalfördelningen.

Vi ska inte här fördjupa oss i några beräkningsdetaljer men vi ska ändå något beröra de matematiska beräkningsproblemen. Antag således att vi erhållit observationen \bar{y}_0 . Det är då ur principiell synvinkel inte svårt att beräkna den betingade fördelningen för \bar{x}_0 givet observationen \bar{y}_0 . Täthetsfunktionen för (\bar{x}_0, \bar{y}_0) är nämligen

$$f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (|det(P_0)|/(\sqrt{(2\pi)^m}))exp(-(\hat{\bar{x}}_0 - \bar{x}_0)^t P_0(\hat{\bar{x}}_0 - \bar{x}_0).$$

$$(|det(Q_0)|/(\sqrt{(2\pi)^m}))exp(-(H_0\bar{x}_0 - \bar{y}_0)^t R_0(H_0\bar{x}_0 - \bar{y}_0)/2).$$

Med hjälp av elementär, men inte trivial, integrationskalkyl kan man integrera ut variabeln \bar{x}_0 och på så sätt bestämma sannolikhetsfördelningen för \bar{y}_0 . Täthetsfunktionen för \bar{y}_0 blir en ny normalfördelning, och täthetsfunktionen för den betingade fördelningen för \bar{x}_0 fås genom division av täthetsfunktioner för två normalfördelningar vilket medför att denna nya täthetsfunktion också blir normalfördelad.

Innan vi avslutar detta kapitel några ord om hur Kalmanfilterteorin för olinjära system förhåller sig till teorin för Bayesianska nät och den begreppsbyggnad för Dolda Markovprocesser som vi redogjort för ovan. Ur beskrivningssynvinkel blir det ingen skillnad alls. Skillnaderna uppstår i samband med beräkningarna. Eftersom de deterministiska sambanden ej längre är linjära samband så kommer de betingade fördelningarna i allmänhet inte längre vara möjliga att beräkna explicit. De betingade fördelningarna kommer nämligen inte längre att vara normalfördelningar. Om vi emellertid t.ex. gör diskretisering av tillståndsrummet för \bar{x} -variablerna, och således diskretiserar rörelsemodellen för tillstånden, men låter sannolikhetsfunktionerna för observationerna fortfarande vara normalfördelningar, så har man i den Bayesianska nätverksteorin visat att det då fortfarande är möjligt att göra snabba uppdateringar. (Se t.ex [2], Kap 7.)

11 Appendix 1.

Bevis av Teorem 5.1. Vi börjar med att citera två resultat från uppsatsen [9]. Först några beteckningar. Låt $M = \{m_{i,j} : 1 \leq i, j \leq d\}$ beteckna en ickenegativ $d \times d$ matris. Vi låter S beteckna mängden

$$S = \{1, 2, \dots, d\}.$$

Ibland, t.ex när ett matrisuttryck är långt kan det vara ändamålsenligt att ha tillgång till följande beteckning:

$$(M)_{i,j} = m_{i,j}. \quad (11)$$

Vi behöver också en beteckning för radsumman och använder beteckningen

$$(M)_i = \sum_j (M)_{i,j}. \quad (12)$$

Normen för en $d \times d$ -matris definierar vi

$$\|M\| = \max_i (M)_i. \quad (13)$$

För att få överensstämmelse med beteckningarna i [9] låter vi $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, d \text{ och } \sum_i x_i = 1\}$, och precis som tidigare, om $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d$ så gäller att $\|x\| = \sum_{i=1}^d |x_i|$. Elementen i K betraktar vi som radvektorer.

Det är också ändamålsenligt för oss att införa en beteckning för de rader respektive kolumner som har något element som är positivt. För en icke-negativ $d \times d$ -matris inför vi därför beteckningarna

$$S_1(M) = \{i : (M)_{i,j} > 0, \text{ minst ett } j, 1 \leq j \leq d\}$$

och

$$S_2(M) = \{j : (M)_{i,j} > 0, \text{ minst ett } i, 1 \leq i \leq d\}.$$

Nedanstående lemma bevisades i [9].

Lemma 11.1 ([9], Lemma 6.1.) Låt M_1, M_2, \dots, M_n vara ickenegativa, subrektangulära $d \times d$ matriser så att

$$\max\{(M_m)_{i,j} : 1 \leq i, j \leq d\} \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Låt $U = M_1 M_2 \dots M_n$ och antag att

$$\|U\| > 0.$$

Sätt

$$\delta_m = \min_{i,j} \{(M_m)_{i,j} : (M_m)_{i,j} > 0\}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Om nu $x \in K$ och $y \in K$ och dessutom såväl $\|xU\| > 0$ som $\|yU\| > 0$ så gäller

$$\|(xU/\|xU\| - yU/\|yU\|)\| \leq d \times (\prod_{m=1}^n (1 - \delta_m^2 \delta_n)).$$

Teorem 5.1 följer nu ganska lätt från detta lemma. För tydlighets skull upprepar vi formuleringen av Teorem 5.1.

Teorem 5.1. *Betrakta en Dold Markovprocess med ändligt tillståndsrum och ändligt observationsrum och antag att Villkor 5.1 gäller. Låt λ beteckna den likformiga fördelningen över tillståndsrummet, låt $\hat{\lambda}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ beteckna den betingade fördelningen för den underliggande Markovprocessen vid tiden t_n givet att initialfördelningen var λ och att man erhållit observationerna a_1, \dots, a_n vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots, t_n , och låt på motsvarande sätt $\hat{p}_n(a_1, \dots, a_n)$ beteckna den betingade fördelningen för den underliggande Markovprocessen givet att initialfördelningen var p_0 i stället för λ , och då man återigen erhållit observationerna a_1, a_2, \dots, a_n vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots, t_n .*

Då gäller, att det finns konstanter C och ρ oberoende av n så att för $n = 1, 2, \dots$ gäller att

$$\|\hat{p}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) - \hat{\lambda}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)\| \leq C \cdot \rho^n \quad (5)$$

varvid ρ är < 1 .

Beviset bygger på Lemma 11.1 och det faktum att både $\hat{\lambda}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ och $\hat{p}_n(a_1, \dots, a_n)$ kan skrivas med hjälp av matrisprodukter. Av formel (4) i Avsnitt 5 följer nämligen att

$$\hat{p}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_0 P_1 Q_{1,a_1} \dots P_n Q_{n,a_n} / \|p_0 P_1 Q_{1,a_1} \dots P_n Q_{n,a_n}\|,$$

och att

$$\hat{\lambda}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda P_1 Q_{1,a_1} \dots P_n Q_{n,a_n} / \|\lambda P_1 Q_{1,a_1} \dots P_n Q_{n,a_n}\|.$$

Vi ska först visa att det finns tal C_1 och $\rho < 1$ så att formel (5) i Teorem 5.1 gäller om $n > 2m_0$ dvs att

$$\|\hat{p}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) - \hat{\lambda}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)\| \leq C_1 \cdot \rho^n$$

gäller om $n > 2m_0$ där m_0 är heltalskonstanten i Villkor 5.1.

Låt således $n > 2m_0$. Skriv $n = gm_0 + r$ där $0 \leq r < m_0$. Definiera nu

$$W_1 = P_1 Q_{1,a_1} P_2 Q_{2,a_2} \dots P_{m_0+r} Q_{m_0+r,a_{m_0+r}}$$

och $W_i, i = 2, 3, \dots, g$ genom

$$W_i = P_{(i-1)m_0+r+1} Q_{(i-1)m_0+r+1, a_{(i-1)m_0+r+1}} P_{(i-1)m_0+r+2} Q_{(i-1)m_0+r+2, a_{(i-1)m_0+r+2}} \dots \\ \dots P_{im_0+r} Q_{im_0+r, a_{im_0+r}}.$$

Det är lätt att inse att för alla matriserna $W_i, i = 1, 2, \dots, g$ så gäller att matriserna är ickenegativa och att största värdet är ≤ 1 . Dessutom gäller att matriserna $W_i, i = 2, 3, \dots, g$ är så att säga "uppbyggda" med hjälp av exakt m_0 observationer. Av Villkor 5.1 följer därför att för $i = 2, 3, \dots, g$ gäller dels att W_i är subrektangulär, dels att

$$\min_{j,k} \{(W_i)_{j,k} : (W_i)_{j,k} > 0\} \geq \kappa.$$

Eftersom matrisen W_1 är "uppbyggd" av minst m_0 matriser följer av Villkor 5.1 och Lemma 5.1 att även W_1 är en subrektangulär matris, som också är sådan att största värdet ≤ 1 .

Sätt nu

$$U = W_1 W_2 \dots W_g.$$

Eftersom observationerna $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ är realiserade observationer, gäller att såväl

$$\|\lambda U\| > 0$$

som

$$\|p_0 U\| > 0.$$

Av Lemma 11.1 följer nu

$$\|(\lambda U / \|\lambda U\|) - (p_0 U / \|p_0 U\|)\| \leq d \cdot \Pi_2^g (1 - \kappa^3) =$$

$$d(1 - \kappa^3)^{g-1} = d(1 - \kappa^3)^{(n-m_0-r)/m_0} \leq d \cdot ((1 - \kappa^3)^{1/m_0})^{n-2m_0}.$$

Sätter vi nu $\rho = (1 - \kappa^3)^{1/m_0}$ och $C_1 = d((1 - \kappa^3)^{1/m_0})^{-2m_0}$ finner vi att olikheten (5) gäller med $C = C_1$ om $n \geq 2m_0$.

Eftersom

$$\|\hat{p}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) - \hat{\lambda}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)\| \leq 2$$

för alla $n \geq 1$ följer att olikheten (5) är sann för $n = 1, 2, \dots$, om vi i stället för att välja $C = C_1$ väljer $C = C_2$ där C_2 förstorats upp i jämförelse med C_1 på så sätt att

$$C_2 = 2C_1\rho^{-2m_0}.$$

Därmed är beviset av Teorem 5.1 klart.

Bevis av Teorem 5.2. Beviset av Teorem 5.2 är betydligt längre. Beviset följer till stora delar beviset av Theorem A i [9]. För tydlighets skull upprepar vi formuleringen. Men eftersom vi förändrat beteckningarna så ska vi formulera satsen med hjälp av de nya beteckningarna.

Låt därför $S = \{1, 2, \dots, d\}$ vara tillståndsrummet för den underliggande Markovprocessen, låt som tidigare A beteckna observationsrummet, som vi antar är ändligt, låt $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, d, \sum_i x_i = 1\}$, vara mängden av sannolikhetsfördelningar över tillståndsrummet S , och låt $C[K]$ beteckna mängden av kontinuerliga funktioner på K . (Den mängden betecknade vi $C[\mathcal{V}]$ i avsnitt 5 och avsnitt 6).

Teorem 5.2. *Betrakta en stabil Dold Markovprocess med ändligt tillståndsrum och ändligt observationsrum, och antag att den underliggande Markovkedjan $\{X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)\dots\}$ är odelbar. Antag också att Villkor 5.1 gäller.*

Låt μ och ν beteckna två godtyckliga initialfördelningar, låt Y_1, Y_2, \dots, Y_n beteckna observationerna vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots, t_n då startfördelningen var μ och låt Z_1, Z_2, \dots, Z_n beteckna observationerna vid tidpunkterna t_1, t_2, \dots, t_n då startfördelningen var ν . (Y_1, Y_2, \dots, Y_n och Z_1, Z_2, \dots, Z_n är således stokastiska storheter.)

Låt $\hat{\mu}_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ och $\hat{\nu}_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ beteckna de betingade fördelningarna för den underliggande Markovprocessen vid tiden t_n då startfördelningen var respektive μ och ν . ($\hat{\mu}_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ och $\hat{\nu}_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ är således också stokastiska variabler vars värden beror på utfallen Y_1, Y_2, \dots, Y_n respektive Z_1, Z_2, \dots, Z_n .)

Då gäller, att för varje $u \in C[K]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E[u(\hat{\mu}_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n))] - E[u(\hat{\nu}_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n))]) = 0. \quad (15)$$

Vi ska nu först påvisa att följderna av betingade fördelningar kan ses som en tillståndsprocess inducerad av ett så kallat *stokastiskt system med fullständig återkoppling*.

Vi definierar avbildningarna $h_n : K \times A \rightarrow K$, $n = 1, 2, \dots$ genom

$$h_n(x, a) = xP_nQ_{n,a}/\|xP_nQ_{n,a}\|, \quad \text{om } \|xP_nQ_{n,a}\| > 0$$

$$h_n(x, a) = x, \quad \text{om } \|xP_nQ_{n,a}\| = 0,$$

och vi definierar sannolikhetsfunktionerna $g_n : K \times A \rightarrow [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$ genom

$$g_n(x, a) = \|xP_nQ_{n,a}\|.$$

Fyrtuppln $\mathcal{R}=\{K, A, h_n, g_n\}$ bildar ett matematiskt begrepp som kallas *stokastiskt system med fullständig återkoppling* (på engelska “*random system with complete connections*”). Till ett stokastiskt system med fullständig återkoppling kan man för varje element $x \in K$ generera två stokastiska processer som vi betecknar $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ och $\{Y_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ på följande sätt: Vi definierar $X_0(x) = x$. Sen väljer vi $Y_1(x)$ slumpmässigt med hjälp av sannolikhetsfunktionen $g_1(X_0(x), \cdot)$ varefter vi erhåller $X_1(x)$ genom

$$X_1(x) = h_1(X_0(x), Y_1(x)).$$

Sen använder vi $g_2(X_1(x), \cdot)$ för att erhålla $Y_2(x)$, och $X_2(x)$ erhåller vi sen genom att bilda

$$X_2(x) = h_2(X_1(x), Y_2(x)).$$

Osv. Processen $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ är en Markovkedja, och kallas för tillståndsprocessen, medan $\{Y_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ *ej* är en Markovkedja och kallas för observationsprocessen eller händelseprocessen. Fördelningen för $X_n(x)$ betecknar vi med $\chi_{n,x}$.

Med dessa beteckningar till vårt förfogande och med hjälp av formlerna (3) och (4) i avsnitt 5, är det inte svårt att inse att följderna $\{\hat{\mu}_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n), n = 1, 2, \dots\}$ kan betecknas $\{X_n(\mu), n = 1, 2, \dots\}$ där den senare följderna är tillståndsprocessen med start i μ som hör till det stokastiska systemet $\mathcal{R}=\{K, A, h_n, g_n\}$ som vi introducerade ovan och att $\{\hat{\nu}_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n), n = 1, 2, \dots\}$ på motsvarande sätt kan betecknas $\{X_n(\nu), n = 1, 2, \dots\}$ där den senare följderna är tillståndsprocessen med start i ν som hör till det stokastiska systemet $\mathcal{R}=\{K, A, h_n, g_n\}$.

För att bevisa (15) skall vi därför visa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E[u(X_n(\mu))] - E[u(X_n(\nu))]) = 0 \quad (16)$$

om $u \in C[K]$.

För $u \in C[K]$ definierar vi

$$\|u\| = \sup\{u(x) : x \in K\}.$$

Låt

$$Lip[K] = \{u \in C[K] : \sup_{x \neq y} |u(x) - u(y)| / \|x - y\| < \infty\},$$

och för $u \in Lip[K]$ låt

$$\gamma(u) = \sup_{x \neq y} |u(x) - u(y)| / \|x - y\| < \infty.$$

Eftersom varje kontinuerlig funktion i $C[K]$ kan approximeras godtyckligt väl med en funktion i $Lip[K]$, dvs om $u \in C[K]$ och $\epsilon > 0$ finns en funktion $v \in Lip[K]$ så att $\|u - v\| < \epsilon$, är det lätt att inse att det räcker att bevisa (16) för all funktioner $u \in Lip[K]$.

Beviset av (16) för det fall att funktionen u i formel (16) tillhör klassen $Lip[K]$ ska vi genomföra i två steg. Vi formulerar följande lemma.

Lemma 11.2 För $m = 0, 1, 2, \dots$ och $n = 0, 1, 2, \dots$ gäller att om $u \in Lip[K]$ så följer

$$\begin{aligned} |E[u(X_{n+m}(x_1)) | X_m = x] - E[u(X_{n+m}(x_2)) | X_m = y]| < \\ (\|u\| + 2\gamma(u)) \|x_1 - x_2\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Lemma 11.2 är en omedelbar konsekvens av följande lemma.

Lemma 11.3 Betrakta en Markovkedja med tillståndsrum $S = \{1, 2, \dots, d\}$ och övergångsmatris P . Låt A vara ett ändligt observationsrum $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Låt $Q = \{q(i, a_k), i = 1, 2, \dots, d, k = 1, 2, \dots, m\}$ vara en observationsmatris. För $a \in A$ låt $Q_a = \{Q_a(i, j), i = 1, 2, \dots, d, j = 1, 2, \dots, d\}$ beteckna den diagonalmatris sådan att $Q_a(i, i) = q_{i,a}$.

Låt som ovan $K = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$. Definiera en Markovkedja på K genom en sannolikhetsfunktion \tilde{R} definierad av

$$\tilde{R}(x, y) = \|xPQ_a\| \text{ om } y = xPQ_a / \|xPQ_a\|, a \in A,$$

$$\tilde{R}(x, y) = 0 \text{ om } y \neq xPQ_a / \|xPQ_a\|, \text{ alla } a \in A.$$

Låt $\{X_n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ beteckna Markovkedjan som startar i punkten $x \in K$. Låt $u \in Lip[K]$.

Då gäller

$$|E[u(X_1(x))] - E[u(X_1(y))]| \leq (\|u\| + 2\gamma(u)) \|x - y\|. \quad (18)$$

Beviset av detta lemma kan antingen göras så att man utnyttjar resultaten i beviset av Lemma 4.3 i uppsatsen [9] och det faktum att de mer allmänna observationsmatriser som vi betraktar, kan, med hjälp av utvidgning av tillståndsrummet, skrivas på den speciella form som behandlas i Lemma 4.3 i [9]. Eller så kan man kopiera ideerna i beviset av Lemma 4.3 i [9] till den mer allmänna situation som vi behandlar i denna uppsats. Vi skjuter upp beviset av Lemma 11.3 till Appendix 2.

Det remarkabla med ovanstående lemma är att resultatet är helt oberoende av sannolikheterna som styr Markovkedjan och av värdena i den matris som bestämmer sannolikheterna för olika observationer. På grund av denna allmängiltighet följer nu att (17) gäller om $u \in Lip[K]$ varav Lemma 11.2 följer.

Det som återstår för att slutföra beviset av Teorem 5.2 är att visa att om vi betraktar två oberoende tillståndsföljder $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ och $\{X'_n(y), n = 0, 1, 2, \dots\}$ inducerade av det stokastiska system med fullständig återkoppling som vi infört ovan, varvid $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ startar i punkten x , och $\{X'_n(y), n = 0, 1, 2, \dots\}$ startar i punkten y så kommer dessa följder förr eller senare vara godtyckligt nära varandra. Ty om så är fallet följer sen lätt att utsagan (16) är sann för alla $u \in Lip[K]$, som vi strax skall visa.

Låt således $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ och $\{X'_n(y), n = 0, 1, 2, \dots\}$ vara två oberoende tillståndsföljder inducerade av det stokastiska system med fullständig återkoppling $\mathcal{R} = \{K, A, h_n, q_n\}$ som vi införde ovan, den förra med start i x , den senare med start i y . Välj $\epsilon > 0$ godtyckligt. Låt

$$N_{x,y} = \min\{n : \|X_n(x) - X'_n(y)\| < \epsilon\}.$$

Lemma 11.4 *För varje $\gamma > 0$ existerar ett N_0 så att*

$$Pr[N_{x,y} > N_0] \leq \gamma.$$

Beviset av detta lemma är inte svårt om man tar del av beviset av Lemma 5.1, Lemma 5.2 och Lemma 5.3 i uppsatsen [9]. Beviset bygger på att den Markovprocess vi betraktar är odelbar och stabil och att också den Dolda Markovprocess vi betraktar är stabil, vilket medför att oavsett vilka värden som startpunkterna x och y har, så kommer vid en fix ändlig tidpunkt N_2 , säg, med positiv sannolikhet de två oberoende följderna $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ och $\{X'_n(y), n = 0, 1, 2, \dots\}$ vara sådana att det finns en komponent i_0 , säg, så att såväl den i_0 :e komponenten av $X_{N_2}(x)$ som den i_0 :e komponenten av $X'_{N_2}(y)$ att vara strikt positiva. Villkor 5.1 garanterar sen att med positiv sannolikhet kommer $\|X_n(x) - X'_n(y)\|$ att vara mindre än ϵ om $n = N_3$, säg, där N_3 således eventuellt är ett ganska stort tal. Eftersom vi betraktar en Dold Markovprocess som är stabil så kan vi - så att säga - upprepa proceduren om $\|X_n(x) - X'_n(y)\|$ inte var tillräckligt liten, och genom

att upprepa tillräckligt många gånger, dvs genom att välja N_0 i lemmat tillräckligt stort, så kan vi garantera att sannolikheten för att händelsen $N_{x,y} > N_0$ skall inträffa, blir mindre än varje förutbestämt positivt tal γ . Ett fullständigt bevis av Lemma 11.4 ges i Appendix 2.

Med hjälp av Lemma 11.4 är det nu inte svårt att slutföra beviset. Låt således $\epsilon > 0$ vara given. Definiera $N_{x,y}$ som ovan. Det gäller då att

$$\begin{aligned} E[u(X_n(x))] - E[u(X'_n(y))] &= E[u(X_n(x)) - u(X'_n(y))] = \\ &= \sum_{k=0}^n E[u(X_n(x)) - u(X'_n(y)) | N_{x,y} = k] Pr[N_{x,y} = k] + \\ &= E[u(X_n(x)) - u(X'_n(y)) | N_{x,y} > n] Pr[N_{x,y} > n]. \end{aligned}$$

Men nu gäller på grund av Lemma 11.2 att om $0 \leq k \leq n$ så följer att

$$|E[u(X_n(x)) - u(X'_n(y)) | N_{x,y} = k]| \leq (||u|| + 2\gamma(u)) ||x - y|| \epsilon.$$

På grund av Lemma 11.4 gäller också att

$$|E[u(X_n(x)) - u(X'_n(y)) | N_{x,y} > n] Pr[N_{x,y} > n]| \leq 2||u|| \epsilon$$

om n väljs tillräckligt stort. Härav följer att

$$|E[u(X_n(x))] - E[u(X'_n(y))]| \leq (||u|| + 2\gamma(u)) ||x - y|| \epsilon + 2||u|| \epsilon$$

om n väljs tillräckligt stort varav följer att (16) gäller om $u \in Lip[K]$.

Bortsett från bevisen av Lemma 11.3 och Lemma 11.4 har vi nu bevisat Teorem 5.2.

12 Appendix 2.

Bevis av Lemma 11.3. Låt $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ och $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ beteckna två fixa men godtyckligt valda vektorer i mängden K varvid som i föregående avsnitt K betecknar mängden $K = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, d, \sum_{i=1}^d x_i = 1\}$.

Vi låter $\{e_i, i = 1, 2, \dots, d\}$ beteckna basvektorerna i R^d . Vi definierar nu

$$S_1 = \{i \in S : x_i > 0 \text{ och } y_i > 0\}$$

$$S_2 = \{i \in S : x_i > 0 \text{ och } y_i = 0\}$$

$$S_3 = \{i \in S : x_i = 0 \text{ och } y_i > 0\}$$

och

$$A_x = \{a \in A : \|xPQ_a\| > 0\}.$$

Som tidigare låter vi $C[K]$ beteckna de kontinuerliga funktionerna på K och $Lip[K]$ de Lipschitz-kontinuerliga funktionerna.

Vi definierar nu vidare $T : C[K] \rightarrow C[K]$ genom

$$Tu(x) = \sum_{\{a \in A_x\}} u(xPQ_a/\|xPQ_a\|)\|xPQ_a\|.$$

Att funktionen $Tu(x)$ alltid är kontinuerlig om funktionen $u(x)$ är kontinuerlig är inte självklart men följer av uppskattningarna nedan.

Det vi måste bevisa för att bevisa Lemma 11.3 är att

$$|Tu(x) - Tu(y)| \leq (\|u\| + \gamma(u))\|x - y\|$$

om $u \in Lip[K]$. Låt oss först konstatera att

$$\begin{aligned} & |Tu(x) - Tu(y)| = \\ & \left| \sum_{i \in S_1} x_i \sum_{a \in A_{e_i}} u(xPQ_a/\|xPQ_a\|)\|e_iPQ_a\| + \sum_{i \in S_2} x_i \sum_{a \in A_{e_i}} u(xPQ_a/\|xPQ_a\|)\|e_iPQ_a\| - \right. \\ & \left. \sum_{i \in S_1} y_i \sum_{a \in A_{e_i}} u(yPQ_a/\|yPQ_a\|)\|e_iPQ_a\| - \sum_{i \in S_3} y_i \sum_{a \in A_{e_i}} u(yPQ_a/\|yPQ_a\|)\|e_iPQ_a\| \right| = \\ & \left| \left(\sum_{i \in S_1} (x_i - y_i) \sum_{a \in A_{e_i}} u(xPQ_a/\|xPQ_a\|)\|e_iPQ_a\| + \right. \right. \\ & \left. \sum_{i \in S_2} (x_i - y_i) \sum_{a \in A_{e_i}} u(xPQ_a/\|xPQ_a\|)\|e_iPQ_a\| + \right. \\ & \left. \sum_{i \in S_3} (x_i - y_i) \sum_{a \in A_{e_i}} u(yPQ_a/\|yPQ_a\|)\|e_iPQ_a\| \right) + \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in S_1} y_i \sum_{a \in A_{e_i}} (u(xPQ_a/||xPQ_a||) - u(yPQ_a/||yPQ_a||)) ||e_iPQ_a|| = |I_1 + I_2|$$

varvid

$$I_1 = \sum_{i \in S_1} (x_i - y_i) \sum_{a \in A_{e_i}} u(xPQ_a/||xPQ_a||) ||e_iPQ_a|| +$$

$$\sum_{i \in S_2} (x_i - y_i) \sum_{a \in A_{e_i}} u(xPQ_a/||xPQ_a||) ||e_iPQ_a|| +$$

$$\sum_{i \in S_3} (x_i - y_i) \sum_{a \in A_{e_i}} u(yPQ_a/||yPQ_a||) ||e_iPQ_a||$$

och

$$I_2 = \sum_{i \in S_1} y_i \sum_{a \in A_{e_i}} (u(xPQ_a/||xPQ_a||) - u(yPQ_a/||yPQ_a||)) ||e_iPQ_a||.$$

Eftersom för varje $i \in S$ det gäller

$$\sum_{a \in A_{e_i}} ||e_iPQ_a|| = 1$$

följer att

$$|I_1| \leq \sum_{i \in S} |x_i - y_i| ||u|| \sum_{a \in A_{e_i}} ||e_iPQ_a|| =$$

$$||x - y|| \cdot ||u||.$$

För att avsluta beviset behöver vi också bevisa att

$$|I_2| \leq 2\gamma(u) ||x - y||.$$

För att visa detta ska vi använda en enkel olikhet för normaliserade vektorer.

Lemma 12.1 *Låt x och y var två vektorer i R^d så att $||x|| > 0$ och $||y|| > 0$. Då gäller*

$$|(x/||x|| - y/||y||)| \leq 2||x - y||/||x||.$$

Bevis. Slutsatsen i lemmat följer lätt av triangelolikheten på följande sätt.

$$\|(x/\|x\| - y/\|y\|)\| = \|(x/\|x\| - y/\|x\| + y/\|x\| - y/\|y\|)\| \leq$$

$$\|(x/\|x\| - y/\|x\|)\| + \|(y/\|x\| - y/\|y\|)\| =$$

$$\|x - y\|/\|x\| + \|(y/\|x\| - y/\|y\|)\| =$$

$$\|x - y\|/\|x\| + \|(y\|y\| - y\|x\|)/(\|x\| \cdot \|y\|) =$$

$$\|x - y\|/\|x\| + \|y\|(\|y\| - \|x\|)/(\|x\| \cdot \|y\|) =$$

$$\|x - y\|/\|x\| + \|\|y\| - \|x\|\|/\|x\| \leq$$

$$\|x - y\|/\|x\| + \|y - x\|/\|x\| = 2\|x - y\|/\|x\|. \quad \mathbf{VSB.}$$

Vi ska nu uppskatta I_2 . Eftersom $|u(x_1) - u(x_2)| \leq \gamma(u)\|x_1 - x_2\|$ för alla $x_1 \in K$ och $x_2 \in K$ följer att

$$|I_2| \leq \gamma(u) \sum_{i \in S_1} y_i \sum_{a \in A_{e_i}} \|(xPQ_a/\|xPQ_a\| - yPQ_a/\|yPQ_a\|)\| \cdot \|e_iPQ_a\|.$$

Använder vi nu Lemma 12.1 finner vi att

$$\|(xPQ_a/\|xPQ_a\| - yPQ_a/\|yPQ_a\|)\| \leq 2(\|xPQ_a - yPQ_a\|)/\|yPQ_a\|$$

vilket i sin tur leder till att

$$|I_2| \leq 2\gamma(u) \sum_{i \in S_1} \sum_{a \in A_{e_i}} (\|xPQ_a - yPQ_a\|) y_i \|e_iPQ_a\|/\|yPQ_a\|.$$

Låt oss nu för varje $a \in A$ definiera

$$S(a) = \{i : \|e_iPQ_a\| > 0\}$$

Kastar vi om summationsordningen finner vi härnäst att

$$|I_2| \leq 2\gamma(u) \sum_{a \in A} ((\|xPQ_a - yPQ_a\|)/(\|yPQ_a\|)) \sum_{i \in S(a)} y_i \|e_i PQ_a\|.$$

Eftersom

$$\sum_{i \in S(a)} y_i \|e_i PQ_a\| = \|yPQ_a\|$$

följer vidare att

$$|I_2| \leq 2\gamma(u) \sum_{a \in A} \|xPQ_a - yPQ_a\|.$$

Det återstår att visa att

$$\sum_{a \in A} \|xPQ_a - yPQ_a\| \leq \|x - y\|. \quad (19)$$

Vi konstaterar först att för varje $a \in A$ gäller att

$$\|xPQ_a - yPQ_a\| \leq \sum_{i \in S} |x_i - y_i| (PQ_a)_i =$$

$$\sum_{i \in S} |x_i - y_i| \sum_{j \in S} p_{i,j} q_{j,a}$$

varav följer att

$$\sum_{a \in A} \|xPQ_a - yPQ_a\| \leq \sum_{a \in A} \sum_{i \in S} |x_i - y_i| \sum_{j \in S} p_{i,j} q_{j,a}.$$

Omkastning av summationsordning ger nu

$$\sum_{a \in A} \|xPQ_a - yPQ_a\| \leq \sum_{i \in S} |x_i - y_i| \sum_{j \in S} \sum_{a \in A} p_{i,j} q_{j,a}.$$

Eftersom

$$\sum_{a \in A} q_{j,a} = 1$$

och

$$\sum_{j \in S} p_{i,j} = 1$$

följer nu att

$$\sum_{i \in S} |x_i - y_i| \sum_{j \in S} \sum_{a \in A} p_{i,j} q_{j,a} = \sum_{i \in S} |x_i - y_i| = \|x - y\|$$

varav slutligen följer att

$$\sum_{a \in A} \|xPQ_a - yPQ_a\| \leq \|x - y\|$$

Därmed är formel (19) visad och således också Lemma 11.3. **VS.B.**

Bevis av Lemma 11.4. Vi upprepar förutsättningarna och målet. Vi har således en icke tidshomogen Markovkedja $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ med ändligt tillståndsrum S och med övergångsmatriser

$$P_n = \{p_n(i, j)\}$$

och sådan att den är både odelbar och stabil. Vi har vidare en följd av observationer som erhålles med hjälp av ett icke tidshomogent observationssystem, med ett ändligt tillståndsrum A med observationsmatriser

$$Q_n = \{q_n(i, a)\}$$

där således elementet $q_n(i, a)$ bestämmer sannolikheten för att vid tidpunkt n erhålla observation a om Markovkedjan $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ befinner sig i tillståndet i vid denna tidpunkt. Vi påminner också om att K betecknar $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, d, \sum_i^d x_i = 1\}$.

Med hjälp av matriserna $\{P_n\}$ och $\{Q_n\}$ kan vi definiera en fyrtuple $\mathcal{R} = \{K, A, h_n, g_n\}$, som ett stokastiskt system med fullständig återkoppling definierat på så sätt att funktionerna $h_n : K \times A \rightarrow K, n = 1, 2, \dots$ definieras genom

$$h_n(x, a) = xP_nQ_{n,a}/\|xP_nQ_{n,a}\|, \quad \text{om } \|xP_nQ_{n,a}\| > 0$$

$$h_n(x, a) = x, \quad \text{om } \|xP_nQ_{n,a}\| = 0,$$

och sannolikhetsfunktionerna $g_n : K \times A \rightarrow [0, 1], n = 1, 2, \dots$ genom

$$g_n(x, a) = \|xP_nQ_{n,a}\|.$$

Låt nu $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ och $\{X'_n(y), n = 0, 1, 2, \dots\}$ vara två oberoende tillståndsföljder inducerade av det stokastiska systemet $\mathcal{R} = \{K, A, h_n, g_n\}$, den förra med start i x , den senare med start i y . Välj $\epsilon > 0$ godtyckligt och låt

$$N_{x,y} = \min\{n : \|X_n(x) - X'_n(y)\| < \epsilon\}.$$

Det vi ska visa är således följande lemma.

Lemma 11.4. *För varje $\gamma > 0$ existerar ett N_0 så att*

$$Pr[N_{x,y} > N_0] \leq \gamma.$$

Som påpekats i Appendix 1, är detta lemma inte svårt att bevisa om man tar del av beviset av Lemma 5.3 i uppsatsen [9]. Till skillnad mot uppsatsen [9] är den underliggande Markovkedjan $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ i vårt fall inte tidshomogen. Vi kräver dock att den underliggande Markovkedjan $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ skall vara odelbar och stabil och att även den Dolda Markovkedjan är stabil. Det faktum att den underliggande Markovkedjan är odelbar och stabil medför att följande gäller.

Lemma 12.2 *Det existerar ett tillstånd i_0 , ett heltal n_0 och ett strikt positivt tal δ_0 så att för varje tillstånd $i \in S$ och varje tidpunkt n finns en sekvens $\{k_n(i), k_{n+1}(i), \dots, k_{n+n_0}(i)\}$ av tillstånd i S så att $k_n(i) = i$, $k_{n+n_0}(i) = i_0$ och*

$$\prod_{m=1}^{n_0} p(k_{n+m-1}(i), k_{n+m}(i)) \geq \delta_0. \quad (20)$$

Bevis. Att det för varje tillstånd $i \in S$ och varje tidpunkt n finns en sekvens $\{k_n(i), k_{n+1}(i), \dots, k_{n+n_0}(i)\}$ av tillstånd i S så att

$$\prod_{m=1}^{n_0} p(k_{n+m-1}(i), k_{n+m}(i)) > 0$$

följer av att den underliggande Markovkedjan är odelbar, och att det dessutom gäller att

$$\inf\left\{\prod_{m=1}^{n_0} p(k_{n+m-1}(i), k_{n+m}(i)) : n = 0, 1, 2, \dots\right\} > 0$$

följer av förutsättningen att den underliggande Markovkedjan är stabil. **QED.**

Låt oss nu betrakta en sekvens $\{k_n(i), k_{n+1}(i), \dots, k_{n+n_0}(i)\}$ av tillstånd i S så att $k_n(i) = i$, $k_{n+n_0}(i) = i_0$ och

$$\prod_{m=1}^{n_0} p(k_{n+m-1}(i), k_{n+m}(i)) \geq \delta_0.$$

Till varje sådan sekvens knyter vi en sekvens $\{b_{n+1}(i), \dots, b_{n+n_0}(i)\}$ av observationer i A valda på så sätt att

$$q(k_{n+l}(i), b_{n+l}(i)) > 0, \quad l = 1, 2, \dots, n_0.$$

Eftersom vi antagit att den Dolda Markovkedjan som vi betraktar också är stabil så innebär det att det finns ett tal δ_1 så att

$$\inf\left\{\prod_{m=1}^{n_0} q(k_{n+m}(i), b_{n+m}(i)) : i \in S, n = 0, 1, 2, \dots\right\} \geq \delta_1. \quad (21)$$

Låt oss nu för $\delta > 0$ definiera

$$K(\delta, i_0) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in K : x_{i_0} \geq \delta\}.$$

Av olikheterna (20) och (21) följer nu enkelt följande resultat.

Lemma 12.3 $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ vara en tillståndsföljd inducerad av $\{K, A, h_n, g_n\}$ med start i $x \in K$. Då gäller att det existerar ett positivt tal $\beta > 0$ så att för alla $x \in K$ och alla $y \in K$

$$Pr[X_{n+n_0}(x) \in K(\delta_0\delta_1, i_0) | X_n(x) = y] \geq \beta$$

där β är oberoende av n , x och y .

Vi utelämnar detaljerna i beviset.

Vi ska härnäst utnyttja Villkor 5.1. Vårt resonemang är likartat det vi förde ovan. Låt m_0 beteckna heltalskonstanten som introduceras i Villkor 5.1. Definiera N så stort att

$$d(1 - \kappa^3)^{N-1} \leq \epsilon \quad (22)$$

varvid κ är konstanten i Villkor 5.1 och ϵ är den godtyckligt valda konstanten som ingår i formuleringen av Lemma 11.4. Låt oss för varje tidpunkt n betrakta en sekvens $\{l_n(i_0), l_{n+1}(i_0), \dots, l_{n+N}(i_0)\}$ av längd $N + 1$ av tillstånd i S sådan att $l_n(i_0) = i_0$ och

$$\prod_{m=1}^N p(l_{n+m-1}(i_0), l_{n+m}(i_0)) > 0.$$

Till varje sådan sekvens knyter vi en sekvens $\{c_{n+1}(i_0), \dots, c_{n+N}(i_0)\}$ av observationer i A valda på så sätt att

$$q(l_{n+m}(i_0), c_{n+m}(i_0)) > 0, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Låt nu y_1 och y_2 vara två element i K som också tillhör $K(\delta_0\delta_1, i_0)$. Definiera för $m = 1, 2, \dots, N$ och $n = 0, 1, 2, \dots$ $M_{m,n} = P_{n+m}Q_{n+m, c_{n+m}(i_0)}$ och definiera $U_n = M_{1,n}M_{2,n}\dots M_{N,n}$. Av Villkor 5.1, Lemma 11.1 och definitionen av talet N (se formel (22)) följer nu att

$$\left| \left(\frac{y_1 U_n}{\|y_1 U_n\|} - \frac{y_2 U_n}{\|y_2 U_n\|} \right) \right| \leq \epsilon. \quad (23)$$

Genom att kombinera Lemma 12.3 och uppskattningen (23), samt återigen utnyttja att både Markovkedjan och den Dolda Markovkedjan är stabila, följer nu följande resultat.

Lemma 12.4 *Låt som tidigare $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ och $\{X'_n(y), n = 0, 1, 2, \dots\}$ vara två oberoende tillståndsföljder inducerade av det stokastiska systemet med fullständig återkoppling $\mathcal{R} = \{K, A, h_n, g_n\}$, den förra med start i x , den senare med start i y . Då gäller för varje heltal $n > 0$ och varje par av element y_1, y_2 i $K(\delta_0\delta_1, i_0)$ att det finns ett tal β_1 så att*

$$Pr[\|X_{n+N}(x) - X'_{n+N}(y)\| < \epsilon \mid X_n(x) = y_1, X_n(y) = y_2] \geq \beta_1.$$

Genom att nu kombinera Lemma 12.3 och Lemma 12.4 följer omedelbart:

Lemma 12.5 *Sätt $N_1 = n_0 + N$. Då gäller för $n = 0, 1, 2, \dots$ att*

$$Pr[\|X_{n+N_1}(x) - X'_{n+N_1}(y)\| < \epsilon] \geq (\beta)^2 \beta_1.$$

Slutligen genom att först välja N_2 så stort att

$$(1 - (\beta)^2 \beta_1)^{N_2} < \gamma$$

och sen definiera

$$N_0 = N_1^{N_2}$$

följer nu av Lemma 12.5 tillsammans med Markovegenskapen att

$$Pr[N_{x,y} > N_0] \leq \gamma,$$

där således

$$N_{x,y} = \min\{n : \|X_n(x) - X'_n(y)\| < \epsilon\}.$$

Därmed är beviset av Lemma 11.4 slutfört och således också beviset av Teorem 5.2.

Referenser

- [1] Artebrant, A. och Tyrberg, R. *Dold Markovmodell för markmålföljning av multipla objekt* Examensarbete, Matematiska Institutionen, Lunds Tekniska Högskola, 2001.
- [2] Cowell, R.G, Dawid, A.P, Lauritzen, S.L. och Spiegelhalter, D.J. *Probabilistic Networks and Expert Systems*, Springer, New York, NY, 1999.
- [3] Doucet, A., de Freitas, N., och Gordon, N. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice* Springer, New York, NY, 2001.
- [4] Ephraim, Y. och Merhav, N. *Hidden Markov Processes*, IEEE Trans Inf Th, vol 48, sid 1521-1550, 2002.
- [5] Frey, B. *Graphical Models for Machine Learning and Digital Communication*, MIT Press, Boston, Mass., USA 1998.
- [6] Goodman, I.R., Mahler, R.P.S. och Nguyen, H.T. *Mathematics of Data Fusion*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, Holland, 1997.
- [7] Hall, D.H. och Llinas, J. *Handbook of Multisensor Data Fusion*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
- [8] Jensen, F. *Bayesian Networks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [9] Kaijser, T. *A limit theorem for partially observed Markov chains*, Ann.Prob **3**, (1975), sid 677-696.
- [10] Kaijser, T. *On a new contraction condition for random systems with complete connections* Pure Appl **26**, (1981), sid 1075-1117.
- [11] Ke, C.C., Herrero, J.G. och Llinas, J. *Comparative Analysis of Alternative Ground Tracking Techniques*, Proc. 3rd Int. Conf. Information Fusion, Paris, France, 2000, sid 647-676.
- [12] Koller, D. och Lerner, U. *Sampling in Factored Dynamic Systems i Sequential Monte Carlo Methods in Practice* (Doucet, A., de Freitas, N., och Gordon, N. red.), Springer, New York, NY, 2001.
- [13] Murphy, K. och Russel, S. *Rao-Blackwellised particle Filtering for Dynamic Bayesian Networks in Sequential Monte Carlo Methods in Practice* (Doucet, A., de Freitas, N., och Gordon, N. red.) Springer, New York, NY, 2001.

- [14] Sidenbladh, H. *Multi-Target Particle Filtering for the Probability Hypthesis Density* International Conference on Information Fusion, 2003, pp. 800-806. (FOI-S-0937-SE, 2003.)
- [15] Wiberg, N. *Codes and Decoding on General Graphs* Doktorsavhandling, Linköpings Universitet, 1996.